N° C.N.R.S. A.O. 9488

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE DIJON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Salah HORCHANI

SUR CERTAINS GROUPES RELATIVISTES QUANTIQUES AU "VOISINAGE" DU GROUPE CONFORME

Soutenue le 14 MAI 1974 devant la Commission d'Examen

MM. M. FLATO — Président
A. LICHNEROWICZ, P. PIGEAUD — Examinateurs
J. SIMON — Invité

Nº C.N.R.S. A.O. 9488

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE DIJON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Salah HORCHANI

SUR CERTAINS GROUPES RELATIVISTES QUANTIQUES AU "VOISINAGE" DU GROUPE CONFORME

Soutenue le 14 MARS 1974 devant la Commission d'Examen

MM.	M. FLATO	Président
	A. LICHNEROWICZ P. PIGEAUD	Examinateurs
	J. SIMON	Invité

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Au Professeur Louis MARIOT

En expression de mon respectueux
attachement à sa mémoire.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549827_0019

AVANT - PROPOS

Parmi les coutumes auxquelles il est agréable de se plier, celle de dire merci m'est des plus chères. Aussi je tiens à dire merci à tous ceux qui, par leur aide bienveillante, ont contribué, d'une façon ou d'une autre, à l'élaboration et facilité la réalisation de ce travail.

Il me faut citer, d'abord et surtout, L. MARIOT qui, autant par son enthousiasme que par ses valeurs humaines et scientifiques, m'a appris à aimer le métier d'enseignant-chercheur et m'a permis de l'exercer. Tous ceux qui l'ont connu, en particulier mon directeur de thèse M. FLATO, regrettent avec moi son absence parmi nous aujourd'hui.

Monsieur A. LICHNEROWICZ a bien voulu s'intéresser à ce travail et faire partie du jury de ma thèse ; je suis profondément sensible à l'honneur qu'il me fait et lui exprime ma vive reconnaissance.

C'est d'un problème que m'a posé L. MARIOT qu'est née mon attention pour la théorie des groupes. Cette attention a été amplifiée par l'enseignement et les séminaires de M. FLATO qui m'initia, patiemment, à la recherche et dont les travaux et les conseils, éclairés et prodigués toujours avec simplicité et amitié, m'ont permis d'avancer et ont suscité en moi un intérêt qui déborde largement le cadre de ce travail ; qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance pour tout cela et pour le réconfort que j'ai toujours trouvé auprès de lui dans les périodes de découragement qui jalonnent naturellement une telle entreprise.

J'exprime ma gratitude à J. SIMON pour sa constante sollicitude à mon égard, les contacts fructueux que j'ai eu avec lui et sa participation au jury et je remercie P. PIGEAUD d'avoir accepté, avec beaucoup de sympathie, d'en être membre.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à mes collègues du laboratoire de physique-mathématique qui, au cours de nombreux échanges de vues, m'ont apporté souvent le concours nécessaire.

Auprès de F. et J. MORET-BAILLY, j'ai toujours trouvé beaucoup de disponibilité et de compréhension, je les remercie très vivement ainsi que le département de physique dans son ensemble qui m'a accueilli pendant l'élaboration de cette thèse en m'accordant des conditions de travail très favorables.

J'aimerais remercier également tout le personnel de la bibliothèque universitaire, section sciences, dont la compétence et le dévouement ont contribué efficacement aux recherches bibliographiques de ce travail, Madame TRUNTZER pour la diligence avec laquelle elle a effectué la frappe du manuscrit et le service de l'imprimerie de l'Université pour le soin apporté à la présentation et l'impression de cette thèse.

Je voudrais terminer ces témoignages de reconnaissance avec une pensée particulière à mon père Hassine et ma compagne Marie-Josèphe qui ont été mon soutien le plus précieux tout le long de ce travail.

TABLE DES MATIERES

PROLOGUE 1

PREMIER CHAPITRE : PERSPECTIVES CONFORMES

I.1. Aperçu de l'introduction du groupe conforme en Physique 9
I.2. Définitions et propriétés générales 15
I.3. Représentations unitaires irréductibles du groupe conforme 28
I.4. Groupe de Weyl, causalité et groupe conforme 34
I.5. L'algèbre conforme comme algèbre unifiante 38
I.6. L'approche groupe "dynamique" 46
I.7. Covariance conforme des équations de champ 50

DEUXIEME CHAPITRE : DEFINITIONS ET PROPRIETES STRUCTURALES DES GROUPES P_2 ET $H_4 \wedge SL(2,C)$.

II.1. Sur le quantum de longueur 59
II.2. Introduction du groupe P_2 61
II.3. Représentations projectives 63
II.4. Application au groupe P_2 et définition du groupe $H_4 \wedge SL(2,C)$ 68
II.5. Sur une nouvelle définition du spin relativiste 78
II.6. Eléments remarquables et centres des algèbres $U(P_2)$ et $U(H_4 \oplus SL(2,C))$ 84
II.7. Connexions avec le groupe conforme 87

TROISIEME CHAPITRE : REPRESENTATIONS GLOBALES ET LOCALES DU GROUPE $H_4 \wedge SL(2,C)$.

III.1. Sur les pourquoi des représentations locales 92
III.2. Représentations globales unitaires irréductibles du groupe $H_4 \wedge SL(2,C)$ 105
III.3. Représentations locales de $H_4 \oplus SL(2,C)$ 113
III.4. Représentations de Miller de l'algèbre de Lie Complexe E_3 121
III.5. Représentations locales de $SL(2,C)$ 125

QUATRIEME CHAPITRE : SUR LES DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE DE LIE $G = H_4 \oplus SL(2,C)$

IV.1. Introduction 138

IV.2. Quelques résultats sur les variétés algébriques L_n 140

IV.3. Les G-modules $H^n(G,G)$ $(n=0,1,2,3)$ 148

IV.4. Déformations de l'algèbre de Lie G 156

CONCLUSION 169

APPENDICE 174

REFERENCES 181

"... On est obligé de poser à la nature des questions en langage mathématique, car c'est seulement dans ce langage qu'on peut espérer en obtenir une réponse... Mais les questions mêmes s'intègrent dans un processus qui se déroule dans un monde matériel..."

W. HEISENBERG

PROLOGUE

Le positivisme des théories physiques puise son essence dans le fait qu'elles n'ont pas pour objet de décrire le comportement réel des phénomènes, mais plutôt d'imaginer des modèles mathématiques (dépourvus, éventuellement, de toute réalité physique; par contre, accumulant constamment des potentialités expérimentales) qui permettent de rendre compte des résultats observés, tout en étant prospectifs (dans le sens d'être capables de prévoir des résultats numériques fournis par des expériences particulières). Aussi l'état ψ, en mécanique quantique habituelle, est une entité non physique (puisque non observable) mais qui contient l'ensemble des potentialités des mesures du système associé avec leur probabilité respective. Inversement d'ailleurs, la dialectique de la physique contemporaine nous enseigne que, pour qu'un fait expérimental puisse être considéré comme scientifique, il est nécessaire qu'il ait des assises rationnelles, l'empirisme en soi-même ne se suffisant plus pour constituer un fait scientifique. En outre, une bonne théorie n'a pas pour seul but d'expliquer certaines données expérimentales et ne serait parachevée si elle n'est pas basée sur des principes généraux (non nécessairement reliés aux données observées dont on cherchait à expliquer la nature) qui lui permettent de se dégager de la conjoncture originelle et gagner le palier des fondements. Ceci n'empêche pas un modèle d'obtenir un succès remarquable sans être complet ; comme le montre l'exemple de "La Voie Octuple" (The Eightfold Way), eu égard

à l'artifice de "cassage de (la) symétrie" (introduite initialement en tant qu'assise du modèle) édifié afin de la sauvegarder devant la situation créée par le problème du spectre de masse. Par contre, la relativité restreinte et la mécanique quantique (qui constituent le double signe sous lequel est placé ce travail) sont deux exemples de théories admirablement parachevées (au sens ci-dessus), mais chacune dans son rayon d'action.

Le relativisme de la physique, le développement des moyens technologiques et l'accroissement des informations qui en découlent amènent les théories physiques (si) complètes (soit-elles) à évoluer soit en harmonie mutuelle, soit par ruptures et décrochements.

Le jumelage de la relativité restreinte et de la mécanique quantique, pour restreint qu'il apparaisse relativement à l'ensemble des théories existantes, fait apparaitre un état de conflit patent (sur lequel nous reviendrons ultérieurement), analogue à ceux qu'a connus la physique au cours de son évolution tel que le choc entre la thermodynamique et l'électrodynamique classiques qui a précédé la naissance des théories quantiques, nous mettant à même d'affirmer qu'il y a incubation d'une nouvelle théorie qui doit coïncider avec les deux précédentes dans les limites où ces dernières étaient valables ; ceci étant fondé sur les deux faits suivants qui constituent les caractéristiques de telles situations:

1/ L'apparition de formalismes allant à l'encontre de certaines règles premières qui gèrent les théories établies (formalisme du moment angulaire complexe, physique des "tachions" : particules qui iraient plus vite que la lumière...), ramènent en conséquence

le foyer de notre intérêt à une conjoncture semblable à celle qui a précédé leur établissement, mais enrichie par les connaissances théoriques et expérimentales accumulées depuis.

2/ L'insuffisance des théories mathématiques (pures) existantes pour répondre à un certain nombre de questions que se posent les physiciens et la nécessité que ressentent ces derniers de forger, eux-mêmes, les outils mathématiques manquants, guidés simplement par l'intuition physique (contractions, déformations, unifications d'algèbres de Lie, représentations non unitaires, représentations locales...).

Une telle situation doit nous encourager, plutôt que de nous décourager, car ce sont les conflits qui engendrent les nouvelles théories et un modèle trop régulièrement fécond ne rencontrant plus de preuves contraires est condamné, à l'avance, à la stagnation.

Si l'on met de côté l'attitude marginale qui consiste à prétendre que, dans l'état actuel de nos connaissances, aucune solution ne peut se présenter et que seule une génération future, disposant d'outils plus développés que la notre, serait capable de la découvrir (attitude qui transforme les difficultés en énigmes), il reste deux manières de sortir d'un tel dilemme :

- la première est que les deux théories en présence se révèlent, in extrémis, capables de résorber les contradictions décelées, ce qui ne sera probablement pas le cas de ce qui nous concerne.
- la seconde (dans laquelle s'intègre notre travail) consiste à procéder à une analyse mathématique plus fine du problème, tout en relâchant quelque peu, si c'est nécessaire, certains des principes généraux valables jusqu'ici en physique.

Il est établi que la mécanique classique non relativiste est régie par un groupe de Lie d'invariance, à savoir le groupe de Galilée qui est une "limite" du groupe de Poincaré (groupe d'invariance de la mécanique relativiste) quand la vitesse de la lumière tend vers l'infini ; ce dernier étant à son tour la "limite" de l'un des deux groupes de de Sitter (qui peuvent être considérés comme groupe d'invariance d'un modèle soit relativiste généralisé, soit cosmologique) quand on fait tendre la courbure de l'espace de de Sitter correspondant vers zéro. En outre, il est bien connu que la mécanique quantique non relativiste est gérée (via les représentations projectives) par le groupe de Galilée étendu qui "tend" vers le groupe de Galilée classique quand h tend vers zéro.

Il s'ensuit que partant d'un des groupes, ci-dessus précités, on peut obtenir tous les autres par les procédés des contractions, déformations et représentations projectives. Autrement dit, partant d'un des niveaux fondamentaux de la physique contemporaine, on redécouvre tous les autres. En conséquence l'on peut dire que, géométriquement, tous les fondements de la physique-mathématique contemporaine (et leurs corrélations mutuelles) sont localisés au voisinage d'un point de la variété algébrique des algèbres de Lie réelles de degré dix, modulo des extensions centrales non triviales (qui n'affectent, en vérité, que le groupe de Galilée, conformément à la théorie des représentations projectives) ; ce qui constitue un formalisme unifiant (toutes) les versions galiléennes et Lorentziennes des théories physiques (habituelles).

A cet égard, un procédé élégant de perturber quelque peu les fondements, généralement admis, est de troquer la variété algébrique,

ci-dessus mentionnée, contre une autre ("minimale" pour éviter les générateurs superflus) qui contient une algèbre de Lie contenant celle de Poincaré (afin de préserver le maximum des acquis quanto-relativistes). Si l'on veut en outre, que le modèle possède des niveaux terminaux, il est nécessaire que la variété cherchée contienne des algèbres de Lie rigides, qu'on suppose semi-simples (à défaut de caractérisations des algèbres de Lie rigides en termes algébriques simples).

La variété minimale répondant à ces conditions est de degré quinze, étant donné que celle de degré quatorze, qui contient la (seule) forme réelle non compacte de l'algèbre de Lie semi-simple complexe exceptionnelle de dimension minimale, ne peut convenir, puisque cette dernière ne contient pas l'algèbre de Poincaré (ni de Lorentz, d'ailleurs), ni ne peut se contracter en une algèbre la contenant. Quant au choix du voisinage de la variété autour duquel nous allons édifier notre modèle, il se trouve naturellement déterminé par les différentes tentatives d'étendre au groupe conforme la théorie de relativité et les diverses idées nouvelles formulées dans son cadre, tout au long de la dernière décennie.

Il nous reste à décider de la façon dont nous allons explorer les "alentours" de l'algèbre conforme. La solution la plus naturelle semble être d'étudier, systématiquement, toutes ses contractions (les extensions centrales non triviales et les déformations ne donnent rien de plus dans ce cas). Mais sous cette forme, le problème est hautement indéterminé (à l'instar du schéma orthodoxe, ci-dessus explicité, où l'on envisagerait les contractions de l'une des deux algèbres de de Sitter) et pourrait déborder le cadre qui

qui nous intéresse ; il mérite, néanmoins, une étude particulière susceptible de corroborer au développement de la théorie des contractions (principalement l'obtention d'une méthode de classification, actuellement inexistante, de toutes les algèbres contractées les plus générales d'une algèbre de Lie donnée) qui, jointe à la théorie des déformations, offre d'intéressantes perspectives de recherches mathématiques (en particulier) dans le domaine de la géométrie différentielle.

La conduite que nous adopterons est motivée par l'hypothèse que nous avons à manier des algèbres de Lie dont l'une (au moins) contient celle de Poincaré, par le désir d'avoir une interprétation potentielle des générateurs extra-Poincaré (déduite de leurs lois de transformation) et par le fait que nous pouvons partir d'une algèbre de Lie de degré quatorze ; les concepts de représentation projective et de déformation-contraction pouvant nous ramener, par la suite, aux "alentours" de l'algèbre conforme. Ce qui constitue le contenu du deuxième chapitre où l'on introduit (après un examen critique de la représentation habituelle de l'espace-temps et son application aux échelles ultra-petites) le groupe P_2 (unification de deux groupes de Poincaré, avec intersection le groupe de Lorentz homogène) dont l'étude des représentations projectives conduit au groupe * $H_4 \Lambda SL(2,C)$ (produit semi-direct de $SL(2,C)$ par le groupe de Heisenberg de degré neuf) qui est une contraction du groupe conforme ; certaines de leurs propriétés générales y sont également données et commentées (possibilité d'une nouvelle défini-

---

* Pour les notations non explicitées, voir l'appendice.

tion du spin, analogies et différences avec les groupes de Galilée et de Poincaré invariants...). Après une analyse circonstanciée du relâchement de certains principes qui concourent (habituellement) à l'application de la théorie des groupes en physique, le troisième chapitre traite les représentations globales et locales du groupe $H_4 \Lambda SL(2,C)$: les premières par le formalisme des représentations induites et les secondes à partir du fait qu'une classe de représentations locales irréductibles de $H_4 \Lambda SL(2,C)$ s'obtient en considérant la somme directe des représentations locales irréductibles de H_4 et celles d'une algèbre de Lorentz dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $H_4 \oplus SL(2,C)$; les représentations locales de $SL(2,C)$ sont alors déterminées à partir des représentations locales de ξ_3 (algèbre de Lie du groupe euclidien de l'espace tridimensionnel) et de l'observation que le corps enveloppant de cette dernière contient une algèbre isomorphe à $SL(2,C)$.

Les déformations de $H_4 \Lambda SL(2,C)$ sont considérées au dernier chapitre où toutes les algèbres obtenues (dont évidemment l'algèbre conforme) sont susceptibles, par leur structure, de décrire des symétries possibles dans un programme, déjà suggéré par plusieurs auteurs, aboutissant à l'existence d'un niveau plus fin que la mécanique quantique habituelle appelé niveau "subquantique".
Nous avons rassemblé dans la conclusion quelques remarques et suggestions sur les continuations possibles de ce travail et sur les problèmes encore inexplorés concernant aussi bien l'algèbre $H_4 \oplus SL(2,C)$ que ces déformées. Jusqu'ici, nous n'avons pas parlé du premier chapitre qui est consacré à une revue du groupe conforme : nous l'avons inséré, comme il se doit, dans ce travail d'une part parce que celui-ci est placé, en vérité, sous le triple signe de la

mécanique relativiste, de la mécanique quantique et du groupe conforme et, d'autre part, parce que son contenu ne peut être trouvé, du moins en grande partie, qu'éparpillé dans des articles de revues ; la littérature sur le sujet est considérable, et nous ne saurions être exhaustif dans l'énumération des articles situés dans la bibliographie.

PREMIER CHAPITRE : PERSPECTIVES CONFORMES*

I.1. Aperçu de l'introduction du groupe conforme en physique

On peut dire que la théorie des groupes et des méthodes algébriques, dans la description d'un système physique, date de l'époque où Newton put justifier théoriquement le principe galiléen de relativité en écrivant ses lois mécaniques fondamentales. En effet, on vérifia que si les équations de Newton sont valables par rapport à un référentiel donné, elles le restent par rapport à tout autre référentiel se déduisant de ce dernier par une transformation de Galilée [1/].

En ce temps, la mécanique était considérée comme étant la base fondamentale de tout phénomène physique, de sorte que le principe galiléen de relativité a dominé la physique pendant plus de deux siècles. L'avènement de l'électromagnétisme va remettre en cause son universalité, puisque les équations de Maxwell lui font défaut. Cette difficulté, s'ajoutant aux contradictions expérimentales où se débattait la physique de XIX^{e} siècle, va être l'un des symptômes avant-coureurs de la naissance de la mécanique relativiste.

---

* Il convient de signaler l'existence dans la littérature de deux articles et d'un symposium [0/] consacrés à des revues du groupe conforme et contenant une bibliographie substantielle ; nonobstant, les deux premiers sont surannés et le dernier, bien que relativement récent, ne suffit pas à notre propos, étant donné qu'il présente certaines lacunes (causalité, unification, covariance conforme cohérente).

La covariance des équations de Maxwell sous le groupe de Poincaré P, démontrée d'abord par Lorentz et ensuite par Einstein et Poincaré, contribua largement à son ébauche (cf. 2/ où l'on trouve toutes les références originales). Il est à noter qu'on a déjà remarqué leur covariance sous les dilatations. Ce fut Cunningham et Bateman qui, en 1910, déterminèrent, les premiers, leur groupe (maximal) de covariance, à savoir le groupe conforme C (qui tient sa dénomination du fait qu'il préserve l'angle d'intersection de deux courbes) de l'espace de Minkowski (son homologue de l'espace euclidien habituel a été introduit longtemps avant par Liouville [4/] dans l'étude des cartes géographiques). Ce résultat est physiquement prévisible, puisque les principes fondamentaux de la relativité étant basés sur le comportement classique du photon qui est décrit par les équations de Maxwell, il est donc normal que ces dernières admettent le même groupe d'invariance que celui du cône de Lumière ; et l'on savait, à partir d'un résultat dû à Engel et Lie [5/], que ce dernier était C.

Voulant généraliser les idées d'Einstein, Page [6/] développa, en 1936, une mécanique relativiste selon laquelle la mesure des intervalles d'espace et de temps est basée simplement sur les signaux lumineux. Le groupe de symétrie de cette théorie s'est avéré être le groupe conforme [7/] et les lois physiques y sont identiques pour des observateurs en mouvements relatifs à accélération constante [8/], résultat qui nous montre déjà (grossièrement) l'importance que peut avoir le groupe conforme en relativité générale puisque, selon les principes de cette dernière, tous les systèmes de référence , soient-ils galiléens ou accélérés, sont équivalents pour la formulation des lois de la nature.

Klein et Noether [9], cherchant un lien entre les lois de conservation et les symétries, ont prouvé, en 1918, que si une équation dérive d'un principe variationnel, alors tout groupe continu à un paramètre de symétrie induit une loi de conservation d'une certaine quantité physique que l'on peut déterminer dès qu'on se donne la forme explicite de la densité Lagrangienne. Ce résultat, appelé communément le théorème de Noether, sera le support des recherches phénoménologiques des théories physiques. Dès 1921, Bessel-Hagen [10] l'appliqua à la covariance des équations de Maxwell sous le groupe conforme, mais se heurta à l'interprétation des dilatations et des accélérations, la partie Poincaré traduisant la convervation de l'énergie-impulsion et du moment angulaire du champ électromagnétique. En vérité, comme nous le verrons de façon détaillée dans la suite, il y a diverses interprétations du groupe conforme selon qu'on l'adopte comme groupe de symétrie approchée ou groupe de symétrie exacte. Si l'on choisit ce dernier point de vue (qui est corroboré par le fait que C ne viole pas la causalité physique [11]), on peut éviter les difficultés d'interprétation en considérant les générateurs supplémentaires comme étant simplement des transformations "passives" traduisant la possibilité de changer l'unité d'échelle d'une façon dépendante du point de l'espace-temps (d'où l'empreinte du groupe conforme dans une théorie de la mesure quantique relativiste), ce qui exige une refonte de la notion de covariance conforme. D'ailleurs l'idée même de la dualité symétrie-convervation (originelle) a été généralisée jusqu'à englober des symétries discrètes, pas nécessairement dans l'espace de Minkowski, à qui ne correspond pas forcément d'observables conservés mais qui traduisent des règles de sélection (qui s'infiltrent

naturellement en mécanique quantique) ou des processus permettant de définir des états d'une même particule. Mais si l'on adopte l'interprétation et la définition orthodoxes de la covariance, une symétrie conforme exacte n'est concevable que pour les particules de masse nulle ou pour des transferts d'énergie-impulsion très élevés [12], puisqu'à ce niveau les effets de masse sont négligeables, résultat (mathématiquement) prévisible du fait que seules les représentations unitaires irréductibles (r.u.i.) du groupe de Poincaré de masse nulle peuvent s'étendre (sans changer d'espace) à des r.u.i. de C [13]. L'inexistence d'une définition cohérente de la covariance sous C a amené les physiciens à adhérer, pendant plus de cinq décennies, à ce dernier point de vue ; ce qui les a conduit à étudier la covariance de différents types d'équations de champ [14] (généralement associé à des particules de masse nulle, quelquefois non linéaires) sans jamais se préoccuper de la loi de transformation des champs eux-mêmes.

Dans la théorie des particules élémentaires, le mouvement externe est supposé invariant sous P (plutôt son groupe de recouvrement universel $\tilde{P}$, pour avoir les spins demi-entiers) ; ce qui permet de définir le concept de particules élémentaires et en donne une première classification, via les degrés de liberté externes, à savoir la masse, le spin et la parité. D'un autre côté, les groupes de symétrie interne permettent de classer les particules en multiplets qui, eux-mêmes sont assemblés en supermultiplets (ensemble de particules classifiées dans une même représentation). Les deux symétries ont été traitées, dans un premier temps, indépendemment l'une de l'autre ; ce qui amena les nombres quantiques du groupe interne SU(3), par exemple, (plus précisément le spin isotopique, sa projection et l'hypercharge) à n'avoir aucune connexion avec les nombres quantiques

externes. Autrement dit, tous les membres d'un même supermultiplet devraient avoir la même masse, spin et parité. Or dans la réalité on observe des différences de masses supérieurss à 100 MeV, phénomène connu parmi les physiciens sous le nom de dégénérescence de masse. Formulé mathématiquement, le problème apparait ainsi : étant donné un groupe externe G (qui doit contenir P, ou ayant une "limite" contenant ce dernier) et un groupe interne S (qu'on suppose simple, essentiellement pour des raisons de commodité mathématique), trouver un groupe de symétrie global H qui les contient tous les deux d'une manière "économique" (pour éviter les observables superflus) et les connecte de façon à avoir des résultats compatibles avec l'expérience. Outre quelques résultats négatifs (partiels) se rapportant essentiellement aux questions structurelles et une relation de phase faisant intervenir le spin et les nombres baryonique et leptonique, les premières tentatives (qui sont par essence une généralisation des supermultiplets de Wigner [15]) n'ont fait qu'introduire des symétries unitaires supérieures [16] parmi lesquelles on peut citer SU(6,6) (obtenu en complètant le produit de Kronecker $C \otimes SU(3)$ et stimulé par le succès partiel du modèle non relativiste SU(6)), malheureusement tous ces modèles se sont heurtés à de nombreux obstacles aussi bien mathématiques que physiques et leurs prédictions ne sont que très partiellement en accord avec les résultats expérimentaux. Un solution satisfaisante fut proposée par Flato et Sternheimer [17] qui, après avoir éliminé la connexion par extension en prouvant que toute extension de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré P par une algèbre de Lie semi-simple est triviale, donc physiquement inacceptable, ont introduit la notion d'unification d'algèbre de Lie, notion qui fait jouer à G et S des rôles symétriques

et qui élimine, de prime abord, les symétries internes compactes telles que SU(3) (d'ailleurs l'hypothèse de compacité habituelle n'a aucune origine physique, elle est simplement basée sur le fait que les groupes non compacts n'étaient pas encore populaires parmi les physiciens). Dans cette perspective, l'algèbre de Lie du groupe conforme unifie l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré (ou l'une des deux algèbres de de Sitter) et celle du groupe SU(2,1) qui serait une alternance non compacte à SU(3).

Jusqu'alors, seules les représentations globales des groupes intervenaient, en général, dans les applications physiques ; les problèmes soulevés par la description des spectres de certains opérateurs des unifications vont être l'une des causes de l'introduction des représentations locales non intégrables en physique. Ainsi, dans ce contexte, une formule de masse dans une représentation locale du groupe conforme fut trouvée [18/] et une représentation locale d'une contraction de l'algèbre conforme, intégrable sur le groupe de Poincaré, fut construite [19/], donnant lieu à un spectre discret pour la masse.

Il convient de remarquer, en guise de conclusion de ce bref aperçu sur les algèbres unifiantes, que plusieurs notions, en vogue ces dernières années dans la littérature (groupes dynamiques, de non-invariance, "Spectrum-Generating-Algebras"...) [20/ 21/] s'intègrent, en vérité (comme on le verra dans la suite) dans le cadre des unifications, côté spectralité, modulo les données de départ.

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant que le succès remporté par le groupe conforme, pendant la dernière décennie, en physique-mathématique, a entraîné certains auteurs dans la recherche

de l'origine conforme de telle ou telle constante physique par des méthodes autant alambiquées qu'artificielles (voir, par exemple [22], pour ce qui concerne la constante de structure fine $e^2/\hbar c$ et le rapport de masse du proton et de l'electron), tentative qu'on retrouve régulièrement tout au long de l'évolution de la physique.

I.2. Définitions et propriétés générales

Le groupe conforme de l'espace-temps plat usuel est le groupe simple réel C des transformations g (non nécessairement linéaires, ni régulières) telles que le $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ soit transformé en $ds'^2 = f(g,\underline{x})\, ds^2$ où $f(g,\underline{x})$ est un facteur positif dépendant du point et de la transformation considérée. Ce groupe a l'avantage important d'être d'une part le groupe le plus général qui (en dehors des singularités) conserve localement le cône de Lumière, et le groupe simple d'ordre le plus bas qui contient le groupe de Poincaré d'autre part. C'est un groupe de Lie à 15 paramètres, engendré (par produits finis) par les transformations suivantes :

(a) Les transformations de Lorentz $L(\Lambda)$

(b) Les translations $T(\underline{a})$

(c) Les réflexions d'espace et de temps (I_s, I_t) (pour lesquelles $ds'^2 = ds^2$)

(d) Les dilatations positives : $\mathcal{D}(\lambda)\underline{x} = \lambda\underline{x}$, $\lambda > 0$; $ds'^2 = \lambda^2\, ds^2$

(e) L'inversion I : $I(\underline{x}) = (\underline{x}^2)^{-1}\underline{x}$; $ds'^2 = \underline{x}^{-4}\, ds^2$

On appelle accélération les transformations

$$A(\underline{a}) = I\, T(\underline{a})\, I \qquad (1)$$

Le fait que I est involutif ($I^2 = 1$) et la relation $T(\underline{a})\, T(\underline{b}) = T(\underline{a} + \underline{b})$ entraînent que l'ensemble des accélérations est

un sous-groupe abélien à quatre paramètres. En outre, on a :

$$\left(A(\underline{a})\ \underline{x}\right)^{\alpha} = \omega(\underline{a},\underline{x})^{-1}(x^{\alpha} + a^{\alpha}\ \underline{x}^2)$$

$$ds'^2 = \omega(\underline{a},\underline{x})^{-2}\ ds^2$$

où $\omega(\underline{a},\underline{x}) = 1 + 2\underline{a}.\underline{x} + \underline{a}^2\ \underline{x}^2 = \omega(\underline{x},\underline{a})$

Par ailleurs, les dilatations constituent un sous-groupe à un paramètre. A partir de là, on obtient les règles de composition :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\lambda)\quad \mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda\ \mu)\\
&L(\Lambda)\quad \mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)\quad L(\Lambda)\\
&L(\Lambda)\quad T(\underline{a}) = T(\Lambda\underline{a})\quad L(\Lambda)\\
&\mathcal{D}(\lambda)\quad T(\underline{a}) = T(\lambda\underline{a})\quad \mathcal{D}(\lambda)\\
&L(\Lambda)\quad A(\underline{a}) = A(\Lambda\underline{a})\quad L(\Lambda)\\
&\mathcal{D}(\lambda)\quad A(\underline{a}) = A(\lambda^{-1}\underline{a})\quad \mathcal{D}(\lambda)\\
&A(\underline{a})\quad T(\underline{b}) = \mathcal{D}\left(\omega(\underline{a},\underline{b})^{-1}\right)\ L(\Lambda(\underline{a},\underline{b}))T(\gamma(\underline{a},\underline{b}))A\left(A(\underline{b})\underline{a}\right)
\end{aligned} \qquad (2)$$

où [1], dans la dernière équation

$$\gamma(\underline{a},\underline{b})^{\alpha} = -\underline{b}^2\ a^{\alpha} + (1 + 2\ \underline{a},\underline{b})\ b^{\alpha} \qquad (3)$$

$$\left(\Lambda(\underline{a},\underline{b})\right)^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + 2a^{\alpha}b_{\beta} - 2\omega(\underline{a},\underline{b})^{-1}\left(b^{\alpha}a_{\beta} + \underline{b}^2a^{\alpha}a_{\beta} + a^2b^{\alpha}b_{\beta} + \underline{a}^2\underline{b}^2a^{\alpha}b_{\beta}\right)$$

Ces relations font ressortir une certaine symétrie entre les translations et les accélérations.

Comme la métrique est hyperbolique, l'inversion et les accélérations sont des transformations singulières : les singularités de I sont les points qui se trouvent sur le cône de lumière à l'origine ; quant à $A(\underline{a})$, elle est singulière sur le cône de lumière de sommet $-(\underline{a}^2)^{-1}$ (si $\underline{a}^2 \neq 0$) ou bien sur le plan $1 + 2\ \underline{a}.\underline{x} = 0$ (sinon).

La composante connexe de l'identité C_o de C est engendrée par les transformations appartenant à P_o, les dilatations et les accélérations, autrement dit par les transformations

un sous-groupe abélien à quatre paramètres. En outre, on a :

$$\left(A(\underline{a})\ \underline{x}\right)^{\alpha} = \omega(\underline{a},\underline{x})^{-1}(x^{\alpha} + a^{\alpha}\ \underline{x}^2)$$

$$ds'^2 = \omega(\underline{a},\underline{x})^{-2}\ ds^2$$

où $\omega(\underline{a},\underline{x}) = 1 + 2\underline{a}.\underline{x} + \underline{a}^2\ \underline{x}^2 = \omega(\underline{x},\underline{a})$

Par ailleurs, les dilatations constituent un sous-groupe à un paramètre. A partir de là, on obtient les règles de composition :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\lambda)\quad \mathcal{D}(\mu) = \mathcal{D}(\lambda\ \mu)\\
&L(\Lambda)\quad \mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)\quad L(\Lambda)\\
&L(\Lambda)\quad T(\underline{a}) = T(\Lambda\underline{a})\quad L(\Lambda)\\
&\mathcal{D}(\lambda)\quad T(\underline{a}) = T(\lambda\underline{a})\quad \mathcal{D}(\lambda) \qquad (2)\\
&L(\Lambda)\quad A(\underline{a}) = A(\Lambda\underline{a})\quad L(\Lambda)\\
&\mathcal{D}(\lambda)\quad A(\underline{a}) = A(\lambda^{-1}\underline{a})\quad \mathcal{D}(\lambda)\\
&A(\underline{a})\quad T(\underline{b}) = \mathcal{D}\left(\omega(\underline{a},\underline{b})^{-1}\right)\ L(\Lambda(\underline{a},\underline{b}))T(\gamma(\underline{a},\underline{b}))A\left(A(\underline{b})\underline{a}\right)
\end{aligned}$$

où [1], dans la dernière équation

$$\gamma(\underline{a},\underline{b})^{\alpha} = -\underline{b}^2\ a^{\alpha} + (1 + 2\ \underline{a},\underline{b})\ b^{\alpha} \qquad (3)$$

$$\left(\Lambda(\underline{a},\underline{b})\right)^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + 2a^{\alpha}b_{\beta} - 2\omega(\underline{a},\underline{b})^{-1}\left(b^{\alpha}a_{\beta} + \underline{b}^2a^{\alpha}a_{\beta} + a^2b^{\alpha}b_{\beta} + \underline{a}^2\underline{b}^2a^{\alpha}b_{\beta}\right)$$

Ces relations font ressortir une certaine symétrie entre les translations et les accélérations.

Comme la métrique est hyperbolique, l'inversion et les accélérations sont des transformations singulières : les singularités de I sont les points qui se trouvent sur le cône de lumière à l'origine ; quant à $A(\underline{a})$, elle est singulière sur le cône de lumière de sommet $-(\underline{a}^2)^{-1}$ (si $\underline{a}^2 \neq 0$) ou bien sur le plan $1 + 2\ \underline{a}.\underline{x} = 0$ (sinon).

La composante connexe de l'identité C_o de C est engendrée par les transformations appartenant à P_o, les dilatations et les accélérations, autrement dit par les transformations

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = (g\underline{x} + \underline{a}\,(g\underline{x})^2) \,/\, \Omega_\lambda(\underline{a}\,,\, g\underline{x}) \qquad (4)$$

où $g\underline{x} = \Lambda\underline{x} + \underline{b}$, $\Lambda \in SO_o(3,1)$ et $\Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x}) = \lambda^{-1}\,\omega(\underline{a},\underline{x})$

On appelle groupe conforme spécial le sous-groupe de C_o engendré par les dilatations et les accélérations, c'est à dire par les transformations (4) où $g = 1$.

De l'homomorphisme entre C et O(4,2), que nous verrons dans la suite, il résulte que le groupe conforme possède quatre composantes connexes, comme tous les groupes $O(p,q)$ [2/]. L'inversion, les réflexions spaciale , temporelle et spatio-temporelle ($I_s I_t$) n'appartiennent pas à C_o ; de plus $I_s I_t$ et I d'une part, I_s et I_t d'autre part, n'appartiennent pas à la même composante connexe ; par contre I_t et I sont dans la même composante connexe.

En appliquant la méthode de Lie-Cartan, on obtient les transformations infinitésimales de l'algèbre conforme C comme des opérateurs différentiels d'ordre un

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta} = x_\alpha\,\partial_\beta - x_\beta\,\partial_\alpha & \text{(transformations de Lorentz)} \\ P_\alpha = \partial_\alpha & \text{(translations)} \\ A_\alpha = \underline{x}^2\,\partial_\alpha - 2x_\alpha\,x^\beta\,\partial_\beta & \text{(accélérations)} \\ D = x^\alpha\,\partial_\alpha & \text{(dilatations)} \end{cases} \qquad (5)$$

Il est à remarquer que les générateurs des pseudo-isométries ($M_{\alpha\beta}$,P_α) sont formellement anti-adjoints, ce qui n'est pas le cas pour ceux des transformations conformes spéciales ; pour les y rendre, il suffit d'ajouter des opérateurs d'ordre zéro convenables, ce qui donne

$$\begin{cases} A_\alpha = \underline{x}^2\,\partial_\alpha - 2\,x_\alpha\,(x^\beta\,\partial_\beta + 2) \\ D = x^\alpha\,\partial_\alpha + 2 \end{cases} \qquad (6)$$

ceci fournissant une représentation de l'algèbre conforme dont une dérivée [3] (agissant dans l'espace de Hilbert $L^2(Q)$ où Q est le cube $0 \leqslant x_\alpha \leqslant a$) a servi de contre-exemple au résultat de [4] ; qui mieux est, elle exhibe un spectre discret pour la masse.

Les relations de commutation de l'algèbre de Lie C du groupe conforme s'obtiennent, en adjoignant à celle de P (cf. appendice) les suivantes :

$$\begin{aligned}
(A_\alpha , P_\beta) &= -2(g_{\alpha\beta} D + M_{\alpha\beta}) \\
(M_{\alpha\beta}, A_\gamma) &= g_{\gamma\beta} A_\alpha - g_{\alpha\gamma} A_\beta \\
(D , P_\alpha) &= -P_\alpha \\
(D , A_\alpha) &= A_\alpha \\
(M_{\alpha\beta}, D) &= (A_\alpha, A_\beta) = 0
\end{aligned} \qquad (7)$$

desquelles on déduit

$$e^{-\lambda D} P_\alpha P^\alpha e^{\lambda D} = e^{2\lambda} P_\alpha P^\alpha \; ; \; e^{-a^\beta A_\beta} P_\alpha P^\alpha e^{a^\beta A_\beta} = \omega(\underline{a},\underline{x})^2 P_\alpha P^\alpha$$

relations qui suggèrent d'interpréter les accélérations comme des dilatations locales. Elles montrent, en outre, que la masse (au repos) $(P_\alpha P^\alpha)^{1/2}$ n'est plus un invariant conforme.

Les invariants fondamentaux (ou opérateurs de Casimir et ses généralisations) de C sont au nombre de trois et peuvent être calculés par la méthode de Racah. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \varepsilon_{ijk} a_k \quad ; \quad M_{io} = b_i \\
\vec{J} &= (a_1,a_2,a_3) \; ; \quad \vec{N} = (b_1,b_2,b_3) \\
\vec{P} &= (P_1,P_2,P_3) \; ; \quad \vec{A} = (A_1,A_2,A_3)
\end{aligned} \qquad (8)$$

ce sont [5]

$$C_2 = \vec{J}^2 - \vec{N}^2 - \frac{1}{2}(\vec{P}.\vec{A} + \vec{A}.\vec{P}) + \frac{1}{2}(P_o A_o + A_o P_o) - D^2$$

$$C_3 = 2D(\vec{J}.\vec{N}) + (\vec{J}.\vec{P})\,A_o - (\vec{J}.\vec{A})\,P_o + \vec{N}\,(\vec{P}\wedge\vec{A}) \qquad (9)$$

$$C_4 = \overline{(g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu)(g^{\rho\sigma} A_\rho A_\sigma)} + (D^2 + \vec{J}^2 - \vec{N}^2)^2 + 4(\vec{J}.\vec{N})^2 +$$

$$+ g^{\mu\nu}\,\overline{A_\mu P_\nu (D^2 - \frac{1}{2} M_{\rho\sigma} M_{\rho\sigma})}$$

$$+ \delta_{\alpha\beta\lambda\lambda'}(g_{\mu\sigma} g_{\sigma\mu'} - g_{\mu\mu'})\,\overline{A_\alpha P_\beta (M_{\lambda\mu} M_{\lambda'\mu'} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\lambda\nu\tau\mu}\varepsilon_{\lambda'\nu'\tau'\mu'} M_{\nu\tau} M_{\nu'\tau'})}$$

$$+ 4\, g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'}\,\overline{P_{\mu'} A_{\nu'} (g^{\rho\sigma} M_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} + D\, M_{\mu\nu})}$$

où δ est le symbole de Kronecker et le trait mentionne l'expression à symétriser c'est à dire qu'en général on a

$$\overline{a_1 \cdots a_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)})$$

S_n étant le groupe des permutations de n objets, les indices des C indiquant les degrés des invariants.

Etudions les transformations P et T, induites par les réflexions spatiale et temporelle, sur l'algèbre de Lie conforme à l'aide de la représentation infinitésimale (5) :

P agit par : $x^\alpha \to g_{\alpha\beta}\, x^\beta$ et T par : $x^\alpha \to - g_{\alpha\beta}\, x^\beta$ donc (en désignant par la même lettre la transformation induite)

P : $\partial_\alpha \to g_{\alpha\beta}\, \partial_\beta$ et T : $\partial_\alpha \to - g_{\alpha\beta}\, \partial_\beta$ ce qui donne :

$$P\, M_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta}\, M_{\gamma\delta} = T\, M_{\alpha\beta} \quad , \text{ soit}$$

$$P\, M_{ij} = M_{ij} = T\, M_{ij}\ , \ P\, M_{io} = - M_{io} = T\, M_{io}\ , \text{ et} \qquad (10)$$

$$P\, P_\alpha = g_{\alpha\beta}\, P_\beta = - T\, P_\alpha\ ;\ P\, A_\alpha = g_{\alpha\beta}\, A_\beta = - T\, A_\alpha\ ;\ PD = D = TD$$

On voit donc, qu'en définissant directement P et T à l'aide de la transformation infinitésimale, sur les générateurs de l'algèbre conforme, on peut distinguer entre les définitions de P et T (il en est de même pour l'algèbre de Lie $\bar{P}$ du groupe de Poincaré), ce qui

n'est pas le cas pour l'algèbre de Lorentz. Si l'on définit C = PT, alors [5] : P,C,T sont des automorphismes involutifs de C, P et T externes, et C interne, tels qu'il existe des formes réelles qui sont (respectivement) $SO(3,3)$, $SO(4,2) \sim C$, $SO(5,1)$ sur lesquelles la prolongation par linéarité de P,C,T à $C_{\mathbb{C}} \sim SL(4)$ (où $A_{\mathbb{C}}$ est l'algèbre de Lie complexe obtenue de A par extension des scalaires : $A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$) induit l'automorphisme involutif correspondant à une décomposition de Cartan.

Ce résultat est foncièrement intéressant, puisqu'il a servi comme point de départ dans la définition naturelle et abstraite, en termes de décomposition de Cartan, des opérations P et T sur les algèbres Lorentziennes (contenant l'algèbre de Lorentz) possédant des formes réelles externes, C se trouvera alors automatiquement défini, via le théorème de Lüders [6], par la relation PCT = 1 (qui correspond à un choix de phase).

L'isomorphisme entre $SO(4,2)$ et C est simplement obtenu en introduisant

$$M_{ab} = M_{\alpha\beta} \text{ , pour } (a,b) = (\alpha,\beta) \text{ ; } M_{65} = D$$
$$M_{5\alpha} = 1/2\ (P_\alpha - A_\alpha) \quad ; \quad M_{6\alpha} = 1/2\ (P_\alpha + A_\alpha) \qquad (11)$$

où a,b = 0,1,2,3,5,6.

Des relations de commutation de l'algèbre conforme on déduit

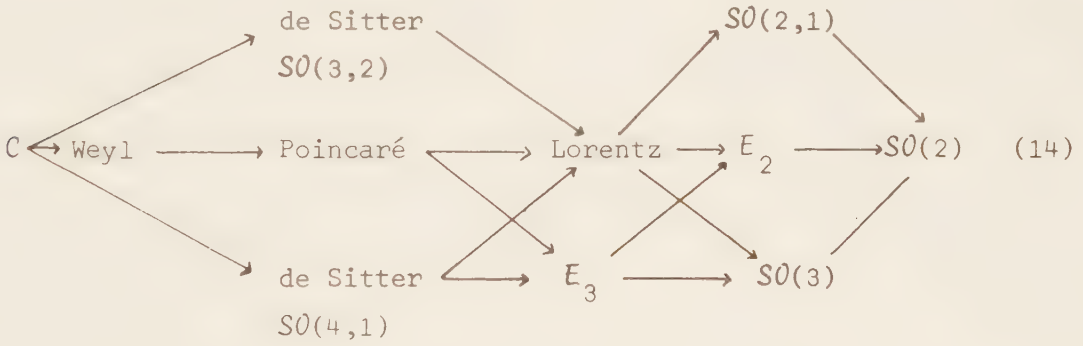
$$(M_{ab}\ ,\ M_{cd}) = -\ g_{ac}\ M_{bd} + g_{ad}\ M_{bc} + g_{bc}\ M_{ad} - g_{bd}\ M_{ac} \qquad (12)$$

où g_{ab} est le tenseur métrique de l'espace pseudo-euclidien à six dimensions de métrique :

$$ds^2 = g_{ab}\ dx^a\ dx^b = (dx^o)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^5)^2 + (dx^6)^2 \qquad (13)$$

Aussi l'algèbre de Lie conforme est une forme réelle du type $A_3 \sim D_3$ (dans la classification de Cartan), soit $SU(2,2) \sim SO(4,2)$.

L'algèbre C contient, entre autres (outre les algèbres de Weyl et de Poincaré) les algèbres homogènes suivantes : $SO(3,2)$ $(M_{\alpha\beta}, M_{6\alpha})$; $SO(4,1)$ $(M_{\alpha\beta}, M_{5\alpha}$; ou bien M_{ij}, M_{6i}, M_{5i} , $M_{65})$; $SO(4)$ (M_{ij}, M_{5i}) ; $SO(2,1)$ (M_{60}, M_{61}, M_{10}) (où l'on a mis entre parenthèses les générateurs de l'algèbre correspondante) et les algèbres inhomogènes qui s'en déduisent, éventuellement, en les couplant avec un certain nombre de translations convenables. Le diagramme suivant, où $A_1 \to A_2$ signifie A_1 contient A_2, fait apparaître certaines de ses sous-algèbres qui interviennent fréquemment en physique et qui jouent un rôle essentiel dans la théorie de ses représentations



(14)

Si l'on relève ce diagramme aux groupes correspondants, la troisième colonne va contenir les petits groupes du groupe conforme, à savoir SO(3,2) (resp. SO(4,1) , P) si le vecteur stabilisé est spatial (resp. temporel, isotrope) .

L'isomorphisme local (d'algèbres de Lie) ci-dessus va induire un homomorphisme global, entre $SO_o(4,2)$ et C (qui, étendu à O(4,2) tout entier, fera apparaître le rôle des transformations discrètes) , de la manière qui suit [1/] :

Soient E l'espace pseudo-euclidien muni de la métrique (13), dont les éléments seront notés $\underline{Y} = (Y^o, Y^1, Y^2, Y^3, Y^5, Y^6)$, et Σ la surface de E définie par

$$\Sigma = \{ \underline{Y} \in E \quad \text{tels que : } \underline{Y} \cdot \underline{Y} = 0 \quad \text{et } Y^6 - Y^5 \neq 0 \}$$

où $\underline{Y} \cdot \underline{Z} = g_{ab}\, Y^a\, Z^a$

L'application $\psi : \Sigma \to M$ (espace de Minkowski) définie par $\left(\psi(\underline{Y})\right)^\alpha = Y^\alpha/(Y^6 - Y^5)$ est une surjection non injective $\left(\psi(\underline{Y}) = \psi(\Sigma)\right.$ si et seulement si $\underline{Y} = \lambda \underline{Z}$, c'est à dire si $\underline{Y}$ et $\underline{Z}$ ont même coordonnées homogènes$\left.\right)$. En outre, si $g \in SO_o(4,2)$, la correspondance $\psi(g)$ de M dans M donnée par $\psi(g)\, \underline{x} = \psi(g\underline{Y})$, où $\underline{Y} \in \psi^{-1}(\underline{x})$, est une application (non partout définie) de domaine de définition $\{\underline{x} \in M$ / si $\underline{Y} \in \psi^{-1}(\underline{x}) : g(\underline{Y})^6 - g(\underline{Y})^5 \neq 0\}$; et l'on a par ailleurs $\psi(1) = 1$, $\psi(g_1\, g_2) = \psi(g_1)\, \psi(g_2)$ et $\ker \psi = \pm 1$. Il s'agit donc d'un homomorphisme de $SO_o(4,2)$ sur un groupe de transformations de M qui est simplement C_o, puisque les transformations

$$(\hat{L}(\Lambda)^a_b) = \left[\begin{array}{c|cc} \Lambda^\alpha_\beta & 0 & \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \end{array}\right] \Lambda \in SO_o(3,1) \qquad (15)$$

$$(\hat{T}(\underline{a})^a_b) = \left[\begin{array}{c|cc} \delta^\alpha_\beta & -a^\alpha & a^\alpha \\ \hline -a_\beta & 1+(1/2)\underline{a}^2 & -(1/2)\underline{a}^2 \\ -a_\beta & (1/2)\underline{a}^2 & 1-(1/2)\underline{a}^2 \end{array}\right], \quad \underline{a} \in M \qquad (16)$$

$$(\hat{D}(\lambda)^a_b) = \left[\begin{array}{c|cc} \delta^\alpha_\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1/2)(\lambda+\lambda^{-1}) & (1/2)(\lambda-\lambda^{-1}) \\ 0 & (1/2)(\lambda-\lambda^{-1}) & (1/2)(\lambda+\lambda^{-1}) \end{array}\right], \quad \lambda > 0 \qquad (17)$$

$$(\hat{A}(\underline{a})^{a}_{b}) = \left[\begin{array}{c|cc} \delta^{\alpha}_{\beta} & -a^{\alpha} & -a^{\alpha} \\ \hline -a_{\beta} & 1+(1/2)\underline{a}^2 & (1/2)\underline{a}^2 \\ a_{\beta} & -(1/2)\underline{a}^2 & 1-(1/2)\underline{a}^2 \end{array}\right] , \underline{a} \in M \quad (18)$$

sont dans $SO_o(4,2)$ et l'on a :

$$\psi(\hat{L}(\Lambda)) = L(\Lambda) \; ; \quad \psi(\hat{T}(\underline{a})) = T(\underline{a})$$

$$\psi(\hat{D}(\lambda)) = D(\lambda) \; ; \quad \psi(\hat{A}(\underline{a})) = A(\underline{a})$$

ce qui entraine $C_o \sim SO_o(4,2)/Z_2$ où $Z_2 = \{\pm 1\}$ est le centre de $SO_o(4,2)$.

Pour étendre ψ à $O(4,2)$ tout entier, il suffit de spécifier l'image par ψ de trois éléments quelconques appartenant respectivement aux trois composantes connexes de $O(4,2)$ autres que $SO_o(4,2)$; de telles transformations sont constituées par

$$S_1 \begin{cases} Y^o \to -Y^o \\ Y^i \to Y^i \\ Y^5 \to Y^5 \\ Y^6 \to Y^6 \end{cases} , \qquad S_2 \begin{cases} Y^o \to Y^o \\ Y^i \to -Y^i \\ Y^5 \to Y^5 \\ Y^6 \to Y^6 \end{cases} , \qquad S_3 \begin{cases} Y^o \to -Y^o \\ Y^i \to -Y^i \\ Y^5 \to Y^5 \\ Y^6 \to Y^6 \end{cases}$$

en vérité, puisque ψ est un homomorphisme et $S_3 = S_1 S_2$, il suffit de déterminer $\psi(S_1)$ et $\psi(S_2)$, on trouve

$$\psi(S_1) = I_t \; , \; \psi(S_2) = I_s \qquad \text{d'où} \quad \psi(S_3) = I_t \, I_s$$

Si l'on considère

$$B_1 \begin{cases} Y^\alpha \to Y^\alpha \\ Y^5 \to Y^5 \\ Y^6 \to -Y^6 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad B_2 \begin{cases} Y^\alpha \to Y^\alpha \\ Y^5 \to -Y^5 \\ Y^6 \to Y^6 \end{cases} \qquad (19)$$

qui sont respectivement dans les composantes connexes de S_1 et S_2, on obtient : $\psi(B_1) = \mathcal{I}$ et $\psi(B_2) = -\mathcal{I}$. De plus, comme pour C_o, l'inversion (plutôt son image réciproque) n'est ni dans $SO_o(4,2)$, ni dans $SO(4,2)$ alors qu'elle est dans $O(4,2)$.

Les transformations infinitésimales déduites des relations (15) - (18) vont fournir l'inverse des relations (11), à savoir :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= M_{ab} \ , \ (\alpha,\beta) = (a,b) \quad ; \ P_\alpha = M_{6\alpha} + M_{5\alpha} \\ A_\alpha &= M_{6\alpha} - M_{5\alpha} \quad ; \ D = M_{65} \end{aligned} \tag{20}$$

de plus, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}\, P_\alpha\, \mathcal{I} = -A_\alpha \ ; \ \mathcal{I}\, A_\alpha \mathcal{I} = -P_\alpha \\ &\mathcal{I}\, M_{\alpha\beta} \mathcal{I} = M_{\alpha\beta} \ ; \ \mathcal{I}\, D\, I = -D \end{aligned} \tag{21}$$

La première relation étant la forme infinitésimale de $A(\underline{a}) = \mathcal{I}\, T(\underline{a})\, \mathcal{I}$.

Dans ces conditions $\mathcal{I}$, opérant sur l'algèbre de Lie conforme par (21) qu'on notera simplement I, est un automorphisme involutif de l'algèbre C, comme on peut le vérifier à l'aide de ses relations de commutation, qui est externe, puisqu'il correspond à un automorphisme externe du groupe conforme connexe. Comme [7] $\mathrm{Aut}\, C/\mathrm{Int}C = Z_2$, I et T sont équivalents l'un de l'autre (modulo Int C). Nous allons poursuivre cette analogie entre I et T. Des relations (21), on obtient

$$\begin{aligned} &I(P_\alpha + A_\alpha) = -(P_\alpha + A_\alpha) \ ; \ ID = -D \\ &I(P_\alpha - A_\alpha) = P_\alpha - A_\alpha \ ; \ I\, M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{22}$$

Aussi les valeurs propres de I sont (-1) sur $(D, P_\alpha + A_\alpha)$ et 1 sur $(M_{\alpha\beta}, P_\alpha - A_\alpha)$, et l'on sait que ces dernières engendrent l'algèbre de de Sitter $SO(4,1)$. Les éléments $(M_{ij}\ , P_j - A_j\ , P_o + A_o)$ engendrent

une sous-algèbre compacte maximale de rang trois (donc le même que celui de l'algèbre conforme), alors que les sous-groupes à un paramètre engendrés respectivement par les M_{jo} , $P_j + A_j$, $P_o - A_o$, D ne sont pas compacts. Prolongeons l'automorphisme I, ainsi défini, à l'algèbre complexe $SL(4)$ (par linéarité) et considérons l'algèbre réelle, forme réelle de $SL(4)$, de générateurs $\{M_{ij}$, i M_{jo}, $P_j - A_j$, $i(P_o - A_o)$; D , $P_j + A_j$, $i(P_o + A_o)\}$; elle est isomorphe à $SO(5,1)$ et la décomposition ci-dessus est une décomposition de Cartan (le point virgule séparant les générateurs de l'algèbre de ceux de l'espace vectoriel).

Si l'on restreint alors I à cette forme réelle, on voit que I est l'automorphisme involutif externe de $SO(5,1)$ défini par la décomposition de Cartan ci-dessus. Aussi I (comme précédemment T) est un automorphisme involutif externe de l'algèbre conforme tel qu'il existe une forme réelle isomorphe à $SO(5,1)$ sur laquelle la prolongation de I à $SL(4)$ induit l'automorphisme involutif correspondant à une décomposition de Cartan.

Il convient de noter cependant que, malgré cette apparente similitude entre T et I, il existe une dissemblance essentielle entre eux : T laisse invariant $g^{\alpha\lambda} P_\alpha P_\lambda$ et $g^{\alpha\lambda} A_\alpha A_\lambda$, alors que I les échange mais conserve $g^{\alpha\lambda} P_\alpha P_\lambda + g^{\alpha\lambda} A_\alpha A_\lambda$, $g^{\alpha\lambda} P_\alpha A_\lambda + g^{\alpha\lambda} A_\alpha P_\lambda$ et $P_\alpha A_\lambda + A_\alpha P_\lambda$.

L'isomorphisme local entre $SU(2,2)$ et $SO(4,2)$ va induire un homomorphisme global entre SU(2,2) et $SO_o(4,2)$ (analogue à celui qui existe entre $SU(2)$ et $SO(3)$, ou bien entre SL(2,C) et $SO_o(3,1)$ et qui est à la base du calcul spinoriel habituel) de la manière suivante [8] :

Soit R^6 l'espace vectoriel réel, de dimension six, des matrices complexes, antisymétriques de la forme :

$$A(\underline{X}) = \begin{pmatrix} 0 & X^1+iX^2 & X^3+iX^4 & X^5+iX^6 \\ & 0 & X^5-iX^6 & X^3-iX^4 \\ & & 0 & X^1-iX^2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

que l'on écrit $A(\underline{X}) = X^a \Sigma_a = \underline{X} \cdot \underline{\Sigma}$ de sorte que les Σ_a soient une généralisation des matrices de Pauli habituelles. Comme celui de Lorentz, l'homomorphisme considéré est un revêtement d'ordre deux de $SO_o(4,2)$: $\pm U \in SU(2,2)$ définissent la même transformation $\Lambda(U)$ de $SO_o(4,2)$ par la relation

$$U(\underline{X}.\underline{\Sigma})\, U^* = (\Lambda(U)\underline{X}) \cdot \underline{\Sigma} \qquad (24)$$

et l'on a plus précisément

$$\Lambda(U)^a_b = (1/4)\ \mathrm{Tr}\ (U\, \Sigma_b\, U^* \Sigma^a)$$

D'où il découle que $SU(2,2)/Z_2 \sim SO_o(4,2)$, ce qui entraine $C_o \sim SU(2,2)/Z_4$, Z_4 étant le centre de SU(2,2).

SU(2,2) est connexe mais non simplement connexe, ce n'est donc pas le groupe de recouvrement universel du groupe conforme. Pour obtenir ce dernier, il faut remarquer, qu'en tant qu'espace topologique, SU(2,2) est homéomorphe au produit topologique $E = SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times R^8$, où R^8 est un espace euclidien à huit dimensions. Aussi le groupe d'homotopie de SU(2,2) est le même que celui de U(1) (qui est d'ailleurs commun à tous les U(n) [9]), à savoir le groupe additif des entiers algébriques. Pour avoir le groupe $\tilde{C}_o$ de recouvrement universel du groupe conforme, il suffit de substituer, dans E, U(1) à son recouvrement universel, c'est à dire R.

En conséquence $\tilde{C}_o$ a un centre infini mais discret ; ce qui implique en particulier, qu'il ne va admettre aucune représentation fidèle de dimension finie.

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant quelques propriétés remarquables des représentations fondamentales de l'algèbre conforme : En premier lieu, elles sont au nombre de trois, la première (qui est à six dimensions) est la représentation de base de $SO(4;2)$ et les deux autres (qui sont quadridimensionnelles) sont d'une part la représentation de base de $SU(2,2)$ et sa contragrédiente d'autre part et peuvent s'exprimer, en fonction des matrices de Dirac, comme suit :

$$\begin{cases} M_{\mu\nu} = (1/4)\,(\gamma_\mu,\gamma_\nu) & ; \; M_{\mu 5} = -(1/2)\,\gamma_\mu\,\gamma_5 \\ M_{56} = +(i/2)\,\gamma_5 & ; \; M_{\mu 6} = -(i/2)\,\gamma_\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} M'_{\mu\nu} = (1/4)\,(\gamma_\mu,\gamma_\nu) & ; \; M'_{\mu 5} = (1/2)\,\gamma_\mu\,\gamma_5 \\ M'_{56} = -(i/2)\,\gamma_5 & ; \; M'_{\mu 6} = -(i/2)\,\gamma_\mu \end{cases}$$

où $(\gamma_\mu,\gamma_\nu)_+ = 2g_{\mu\nu}$, $\gamma_5 = \gamma_o\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ et $(\gamma_o,\ i\,\gamma_j)$ sont hermitiques.

En outre, les restrictions de ces deux représentations à l'algèbre de Lorentz sont identiques et équivalentes à la représentation (complexe) réductible $D(1/2,0) \oplus D(0,1/2)$ (mais irréductible sur les réels). D'ailleurs, hormis la représentation triviale, il n'y a que deux représentations réelles inéquivalentes du groupe de Lorentz : la précédente (qui à servi à l'introduction d'un groupe de "type-Poincaré" régissant la physique du neutrino [10], et la représentation $D(1/2,1/2) = D(1/2,0) \otimes D(1/2,0)$ (qui définit le groupe de Poincaré habituel).

Pour de plus amples investigations sur les représentations finies du groupe conforme, on peut se reporter à [11/ 12/ 13/] ; Quant à ses représentations unitaires irréductibles (r.u.i.), elles constitueront le sujet de notre prochain paragraphe.

I.3. Représentations unitaires irréductibles du groupe conforme

Mentionnons, tout d'abord, un résultat fondamental se rapportant à la théorie des représentations des groupes non compacts : Si G est un groupe de Lie simple non compact, aucune de ses représentations irréductibles fidèles et de dimension finie n'est équivalente à une représentation unitaire ; toute représentation unitaire irréductible et non triviale de G est nécessairement de dimension infinie.

Si l'on choisit un groupe G donné comme "groupe de symétrie" d'un système considéré, l'interprétation physique (orthodoxe, principalement, où l'on suppose la conservation des probabilités dans les modèles) nécessite la résolution de certains problèmes mathématiques dont les plus importants sont les suivants :

a/ Classification et construction des r.u.i. de G

b/ Réduction d'une représentation réductible en ses composantes irréductibles, propriété qui se pose de façon naturelle dans le cadre des systèmes en intéraction où intervient le produit tensoriel de représentations

c/ Réduction de la restriction (resp. L'extension) d'une r.u.i. de G (resp. d'un sous-groupe H de G) à un de ses sous-groupes (resp. à G tout entier)

d/ Multiplicité d'une représentation d'un sous-groupe dans une représentation donnée du groupe

e/ Détermination et spectralité des ensembles maximaux d'opérateurs commutant pour une représentation considérée.

f/ Représentations du groupe étendu selon un certain nombre de ses automorphismes ; celles-ci n'étant pas nécessairement irréductibles sur le groupe lui-même ; qui mieux est, il y a souvent incompatibilité entre l'irréductibilité relative au groupe initial et celle au groupe étendu.

Si de tels problèmes sont résolus dans le cas des (r.u.i.) des groupes compacts (qui sont, bien entendu, de dimension finie), nos connaissances actuelles sont loin d'être complètes à l'égard des groupes non compacts : on ne dispose que d'études partielles et éparses se rapportant à des cas particuliers et il reste beaucoup de questions ouvertes intéressantes pour les mathématiciens eux-mêmes.

Pour ce qui concerne le groupe conforme, eu égard aux isomorphismes $C_o \sim SO_o(4,2)/Z_2$ et $SO_o(4,2) \sim SU(2,2)/Z_2$, la détermination de ses représentations se ramène à celles de $SO_o(4,2)$ ou $SU(2,2)$; plus explicitement : pour obtenir les représentations de C_o à partir de celles de $SO_o(4,2)$ (resp. $SU(2,2)$), il suffit de se restreindre aux représentations de ce dernier pour lesquelles Z_2 (resp. Z_4) est représenté trivialement. Aussi, la caractérisation de ses représentations va se rattacher à celle qui est relative aux groupes simples de type A_ℓ et D_ℓ [1/] :

Les r.u.i. continues d'un groupe simple de rang ℓ sont caractérisées par les valeurs propres des éléments d'une sous-algèbre abélienne maximale dans l'algèbre enveloppante (de son algèbre de Lie) une telle sous-algèbre comporte $(n+\ell)/2$ éléments algébriquement indé-

pendants, où n est le degré du groupe $(n = \ell/\ell+2)$ (resp. $\ell(2\ell+1)$, $\ell(2\ell-1)$ pour A_ℓ (resp. B_ℓ , D_ℓ)) . Pour les groupes de type A_ℓ, on considère d'abord les ℓ invariants fondamentaux, les restants sont habituellement choisis comme étant les ℓ éléments (canoniques) d'une sous-algèbre de Cartan et les $\ell(\ell-1)/2$ invariants des algèbres emboitées successives de la chaîne $A_{\ell-1} \supset A_{\ell-2} \supset \ldots \supset A_2 \supset A_1$ qui, dans ce cas, commutent avec la sous-algèbre de Cartan. Pour les groupes de type D_ℓ, on a de même les ℓ invariants de D_ℓ, et les restants sont habituellement pris comme étant les $\ell(\ell-1)$ invariants des sous-algèbres de la chaîne $B_{\ell-1} \supset D_{\ell-1} \supset \ldots \supset B_1 \supset D_1$.

Puisque le groupe conforme est du type $A_3 \sim D_3$, on aura à considérer

$$SU(2,2) \supset SU(2,1) \supset SU(2)$$

ou bien alternativement

$$SO(4,2) \supset \left(SO(4,1),\ SO(3,2)\right) \supset SO(3,1) \supset SO(3) \supset SO(2)$$

Parmi les méthodes qui ont fourni une famille non négligeable de r.u.i. du groupe conforme, celle des représentations induites [2/] (qui est un cas particulier du formalisme plus général de représentations à multiplicateurs [3/]) occupe une place privilégiée (d'ailleurs pour tous les groupes localement compacts) et la décomposition d'Iwasawa y joue un rôle particulier :

Soit G un groupe de Lie semi-simple de type non-compact connexe ayant un centre fini ; alors G a des sous-groupes fermés connexes K, A et N (déterminés à un automorphisme intérieur près de G) ayant les propriétés suivantes :

1/ K est un compact maximal de G

2/ A est abélien

3/ N est nilpotent

4/ L'application $(k,a,n) \to kan$ de $K \times A \times N$ dans G est un homéomorphisme sur G

5/ Soit C_A le centralisateur de A dans $K(\{k \in K / ka = ak \ \forall a \in A\})$, alors le groupe $H = C_A \ A \ N$ est fermé dans G, N et AN sont des sous-groupes normaux et fermés de H.

Cette décomposition nous permet de faire les identifications suivantes, pour ce qui concerne le groupe conforme :

K est le groupe engendré par $(M_{ij}, P_j - A_j, P_o + A_o)$, autrement dit $K = SO(4) \times SO(2)$; A est le sous-groupe abélien (non compact) à deux paramètres réels constitué par les matrices

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & & & & \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \cosh\rho & \sinh\rho \\ & 0 & & & \sinh\rho & \cosh\rho \end{pmatrix}$$

et N est le sous-groupe nilpotent de générateurs $(M_{6\alpha} + M_{5\alpha}$, $M_{01} + M_{31}$, $M_{20} - M_{23})$ dont les deux derniers engendrent la composante nilpotente du groupe de Lorentz (dans la décomposition d'Iwasawa), ses composantes compacte et abélienne sont engendrées respectivement par (M_{23}, M_{31}, M_{12}) et M_{30}. Quant à C_A, il est composé des matrices

$$\begin{pmatrix} 1_2 & 0 & 0 \\ 0 & SO(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors quatre grandes classes de représentations (chacune d'elles contenant plusieurs séries), plus explicitement [2/ 4/]:

a/ Les séries principales non dégénérées (où tous les invariants sont nécessaires pour leur caractérisation) qui sont induites par des r.u.i. de dimension finie de H. Le nombre de telles séries non isomorphes est égal au nombre de sous-groupes de Cartan (du groupe G) non isomorphes; en outre, si G possède un sous-groupe de Cartan compact, il existe une série discrète caractérisée par des scalaires prenant des valeurs entières. Ce qui est bien le cas du groupe conforme, puisqu'il possède trois sous-groupes de Cartan non isomorphes [qui correspondent à la possibilité de prendre 0,1 ou 2 générateurs d'une sous-algèbre de Cartan dans la partie non compacte] engendrés respectivement par : $(M_{12}, P_o+A_o, P_3-A_3)$; $(M_{12}, M_{03}+D, P_3-A_3-P_o-A_o)$; et (D, M_{12}, M_{oi}).

Exceptéela série discrète, les représentations de cette classe n'apparaissent guère dans les applications physiques, principalement en raison du nombre "d'observables" surabondant qu'elles introduisent.

b/ Les séries des représentations complémentaires non dégénérées constituées par les représentations unitaires de G induites par des représentations irréductibles non unitaires de dimension finie de H.

Les deux autres classes sont liées aux sous-groupes $\tilde{H}$ définis par $\tilde{H} = C_{\tilde{A}}\, A\, N$ où $\tilde{A}$ est une famille d'éléments de A (dégénérés en tant que matrices) et $C_{\tilde{A}} = \{k \in K \,/\, ak = ka \;\; \forall a \in \tilde{A}\}$, on a évidemment $H \subset \tilde{H}$. Alors les représentations de G induites par des représentations unitaires (resp. non unitaires) de dimension finie de $\tilde{H}$ sont appelées les séries principales (resp. complémentaires) dégénérées ; elles sont caractérisées par un nombre d'invariants inférieur au rang du groupe.

En sus de ces quatre grandes classes de représentations, il existe des représentations dites exceptionnelles.

A priori, il n'est pas clair de dire quel est le type de représentations qui sont les plus adéquates pour les applications physiques; cependant, certains critères peuvent être obtenus sur la base de l'étude de l'ensemble maximal d'opérateurs commutants, car ce sont ces opérateurs qui doivent être interprétés physiquement. Aussi, pour se débarasser des opérateurs superflus, on a intérêt à considérer les séries de représentations pour lesquelles le nombre de tels opérateurs n'est pas trop élevé, autrement dit les représentations dégénérées (puisque, dans ce cas, ce nombre est réduit considérablement). C'est pour cette raison que ce sont ces représentations qui ont été le plus largement étudiées, principalement les plus dégénérées qui sont déterminées par un seul invariant.

Le fait que le groupe conforme contienne les groupes de Poincaré, de Weyl et de de Sitter a amené certains auteurs à l'étude des représentations du groupe conforme dont la restriction à l'un de ces sous-groupes reste irréductible [5/]. De telles situations se posent d'une

façon naturelle quand on veut chercher sous quelles conditions l'invariance d'un modèle physique selon un de ces groupes implique l'invariance du même modèle sous le groupe conforme. Pour de tels problèmes, on part en général d'une r.u.i. du groupe considéré et l'on prouve l'existence d'un nombre d'opérateurs qui peuvent être identifiés aux générateurs manquants du groupe conforme. Quant à la réduction d'une r.u.i. du groupe conforme à un de ses sous-groupes, elle n'a été étudiée que dans des cas isolés [6]. Signalons à ce sujet que, contrairement aux groupes SO(n,1) et SU(n,1) où la multiplicité d'une r.u.i. du sous-groupe compact maximal est au plus l'unité [7], dans le cas conforme elle peut être plus grande que un (dans les séries dégénérées, par exemple) ; ce qui a induit certains auteurs en erreur [8].

Soulignons, pour terminer, qu'il existe d'autres méthodes [9] (principalement infinitésimales et dérivées du formalisme des induites) pour la résolution de certains des problèmes ci-dessus mentionnés.

I.4. Groupe de Weyl, causalité et groupe conforme

Soit λ un nombre réel positif. Une dilatation (ou homothétie) de l'espace-temps est représentée par la matrice $\lambda 1$; elle commute avec les transformations de Lorentz et multiplie les translations par λ, c'est un automorphisme du groupe de Poincaré. Les dilatations forment le groupe $R_+^\times$, groupe multiplicatif des réels positifs. Nous pouvons donc former le produit semi-direct $W = P \wedge R_+^\times$ dont la loi de groupe est

$$(\underline{a}_1 , \Lambda_1, \lambda_1) (\underline{a}_2, \Lambda_2, \lambda_2) = (\underline{a}_1+\lambda_1 \Lambda_1 \underline{a}_2, \Lambda_1 \Lambda_2, \lambda_1 \lambda_2) \qquad (1)$$

et l'on a

$$(\underline{a},\Lambda,\lambda)^{-1} = (-\lambda^{-1}\,\Lambda^{-1}\,\underline{a}\,,\ \Lambda^{-1}\,,\ \lambda^{-1})$$

Nous notons $W_+^{\uparrow}$, $W^{\uparrow}$, W_+ les groupes $P_+^{\uparrow} \wedge R_+^{\swarrow}$, $P^{\uparrow} \wedge R_+^{\swarrow}$ et $P_+ \wedge R_+^{\times}$ respectivement.

Comme ceux de Lorentz et de Poincaré, le groupe de recouvrement universel du groupe de Weyl W est à deux feuillets. Si l'on note D, le générateur infinitésimal des dilatations, les relations de commutation de son algèbre de Lie sont données, en adjoignant à celles de Poincaré, les suivantes : $(D,P^{\alpha}) = - P^{\alpha}$, $(D,M^{\alpha\beta}) = 0$.

Désignons par le triplet $(\underline{a},\Lambda,\lambda)$ la transformation conforme

$$\underline{x} \to \underline{x}' = \frac{\lambda\Lambda\underline{x} + \underline{a}\lambda^2\underline{x}^2}{\omega(\underline{a},\lambda\Lambda\underline{x})} \qquad (2)$$

Cet ensemble de transformations admet la loi de composition

$$(\underline{a}_1,\Lambda_1,\lambda_1)\ (\underline{a}_2,\Lambda_2,\lambda_2) = (\underline{a}_1+\lambda_1^{-1}\,\Lambda_1\,\underline{a}_2,\Lambda_1\,\Lambda_2,\lambda_1\,\lambda_2) \qquad (3)$$

c'est donc un sous-groupe du groupe conforme isomorphe au groupe de Weyl de l'espace-temps.

A l'instar de $\tilde{P}$, $\tilde{W}$ ne possède que des représentations projectives vectorielles ; quant à celles de $W_+^{\uparrow}$, elles sont bivaluées ($\omega(g_1,g_2) = \pm 1$), étant donné qu'il est doublement connexe, et peuvent être déterminées par la méthode de représentations induites. Le passage des représentations de $W_+^{\uparrow}$ à celles de W se fait, de la même façon que dans le cas du groupe de Poincaré, en combinant des couples de représentations de $W_+^{\uparrow}$ [1/]. Cependant, eu égard à sa structure, le groupe de Weyl possède (à la différence du groupe de Poincaré dont les orbites, en nombre infini dénombrable, sont caractérisées

par la valeur du carré de la masse et le signe de l'énergie) six orbites dépendant essentiellement des signes du carré de la masse et de l'énergie. Néanmoins ses r.u.i. sont également caractérisées par une valeur du spin. Une interprétation possible du groupe de Weyl est de considérer que chacune de ses r.u.i. caractérise une particule dont la masse est mesurée dans toutes les échelles possibles ; on peut alors choisir une "particule unité" caractérisée par $\lambda = 0$ et les autres représentations équivalentes, transformées de la précédente par l'automorphisme interne $e^{-\lambda D}$, décriront les autres particules ayant le même spin et ayant leur masse mesurée par la valeur $e^{-\lambda}$.

On sait que les réflexions spatiales et temporelles sont des automorphismes externes du groupe de Poincaré connexe ; qui plus est, l'on a [2/]

$$\text{Aut } P_+^\uparrow = \text{Aut } P^\uparrow = \text{Aut } P_+ = \text{Aut } P = W$$

Mais W lui-même est complet (à centre trivial et W = Aut W)

Le groupe de Weyl possède une autre caractérisation remarquable : si l'on définit de façon convenable la notion du groupe d'automorphismes causals de l'espace de Minkowski M, alors ce groupe est simplement $W^\uparrow$ [3/]. Le raisonnement qui a été poursuivi pour obtenir ce résultat est, en substance, le suivant :

Si l'on admet qu'il y a, dans les phénomènes physiques, des causes et des effets, on est naturellement amené à distinguer les causes des effets ; pour ce faire, on définit la relation (stricte) d'ordre partiel dans M

$$\underline{x} < \underline{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q(\underline{x} - \underline{y}) > 0 \\ y^\circ > x^\circ \end{cases}$$

où $Q(\underline{x}) = \underline{x}.\underline{x}$, induite par la relation stricte d'ordre total habituelle de R, que l'on appelle relation de causalité (du fait que $\underline{x} < \underline{y}$ équivaut à $\underline{x}$ est dans le passé de $\underline{y}$). On définit ensuite un automorphisme causal f de M comme étant une application biunivoque de M sur M conservant l'ordre partiel ainsi défini : $\underline{x} < \underline{y} \Leftrightarrow f(\underline{x}) < f(\underline{y})$ et l'on montre que l'ensemble de tels automorphismes est le groupe de Weyl $W^{\uparrow}$.

Ce résultat, qui semble imposer de très fortes restrictions à la structure du groupe d'invariance d'une théorie relativiste, a été discuté [4/] de façon critique tant sur les hypothèses sur lesquelles il repose que sur les conclusions qu'on pourrait être tenté d'en tirer :

a/ L'hypothèse selon laquelle f doit être biunivoque est très restrictive. On peut en effet avoir à considérer toutes sortes de singularités de f qui ne serait astreinte (ainsi que son inverse) à conserver l'ordre causal que dans les régions où elle est définie.

b/ f et f^{-1} préservent la relation d'ordre causale (éventuellement, dans une région donnée) si et seulement si elles préservent la relation non transitive $<'$ définie par

$$\underline{x} <' \underline{y}' \Longleftrightarrow Q(\underline{x} - \underline{y}) = 0 \quad \text{et} \quad x^{\circ} < y^{\circ}$$

en particulier, il est nécessaire que f transforme rayons de lumière en rayons de lumière.

c/ On s'intéresse surtout, en physique, aux équations de mouvement et à leur covariance. Le groupe de covariance de ces équations est en partie induit par des transformations sur l'espace-temps. En outre, une équation peut très bien décrire un phénomène physique tout en étant invariante sous d'autres transformations non causales selon [3/].

d/ Les principes fondamentaux de la relativité sont basés sur le comportement classique du photon, décrit par les équations de Maxwell ; il est alors étonnant que les équations du photon, particule avec laquelle on définit la causalité, soit covariante sous un groupe strictement plus grand que le groupe causal.

Ainsi l'analyse de l'action classique du groupe conforme, qui est moins sujette à de telles critiques, montre que l'on peut l'utiliser sans violer pour autant (du moins localement) la causalité physique. En effet, on peut constater que pour toute région bornée K de M contenant l'origine, il correspond un voisinage dans le groupe conforme tel que ce voisinage opère sur K de façon causale (au sens de [3]) ; on exprime ce fait en disant que l'algèbre de Lie du groupe conforme est causale.

I.5. L'Algèbre conforme comme algèbre unifiante

Comme nous l'avons déjà souligné, il existe nécessairement un lien entre les symétries externes et internes. La recherche d'un tel lien a amené Michel [1] à l'étude (du point de vue algébrique) des extensions centrales de P par les groupes de jauge $U_Q(1)$, $U_B(1)$ et $U_L(1)$, où Q,B et L sont les trois espèces de charge strictement conservées, à savoir les charges électrique, baryonique et leptonique. Le seul résultat positif auquel il a abouti est la relation de phase $(-1)^{2J} = (-1)^{B+L}$ (J étant le spin). Les autres résultats (structurels) négatifs, obtenus dans la recherche de la connexion entre ces deux symétries, sont (strictement) contenus (avec des hypothèses plus générales) dans les travaux de Flato et Sternheimer [2] ; qui mieux est, ils y étaient à l'origine de l'introduction de la notion d'unifica-

tion qui a déjà donné des résultats forts prometteurs (en particulier une formule de masse dont la précision est meilleure que celle obtenue par Gell'Mann-Okubo).

Ils se sont présentés, primitivement, comme suit : McGlinn [3] et Greenberg [4] prouvèrent que dans le cas d'un groupe de symétrie interne S semi-simple, toute algèbre de Lie combinant S et P telle que $(L,S) = 0$ est une somme directe. Au niveau groupe, Michel [5], en utilisant la théorie des extensions, a montré le résultat suivant : si H est le complexe PS et si $S \cap P = \{e\}$, pour que H soit un produit semi-direct $H = P \wedge S$, il suffit qu'il y ait un seul élément $s \in S$ tel que $p\ s\ p^{-1} \in S \quad \forall p \in P$; avec des restrictions sur les translations, Michel et Sakita [6] ont prouvé que l'on ne pouvait avoir qu'un produit direct. Afec des hypothèses semblables, Coleman [7] a prouvé un résultat analogue.

Une algèbre U est dite unifiante pour deux algèbres A_1 et A_2 s'il existe des isomorphismes λ_1 (resp. λ_2) de A_1 (resp. A_2) dans U tels que U soit somme (pas nécessairement directe) de $\lambda_1(A_1)$ et $\lambda_2(A_2)$, on note alors $U(A_1,A_2)$.

Les premiers résultats des unifications ont confirmé l'idée, déjà suggérée par plusieurs auteurs [8], que la symétrie forte devait être du type espace-temps : Si l'on veut un lien non trivial entre les symétries externe et interne, l'algèbre interne doit être non compacte de type Lorentzien, ou bien $G_{2,2}$ (l'unique forme réelle non compacte de G_2), ou bien finalement $SU(2,1)$. Et l'on sait que toutes les algèbres simples non compactes de dimension ≥ 6 sont de type Lorentzien sauf $G_{2,2}$, $SU(2,1)$ et $SL(3,R)$ (cette dernière conduit donc à un lien trivial).

Dans ce cadre on a $SU(2,2) = U(P,SU(2,1))$ où l'on prend pour base de $SU(2,1)$ $(1/4\ (2a_k + P_k - A_k)$, $k = 1,2,3$, $P_1-A_1-2a_1+2(P_o+A_o)$; $P_1+A_1+P_o-A_o$; $P_2+A_2+2b_3$; $2b_2-P_3-A_3$; b_1-A_4) et l'on sait que $SU(2,1)$ est une sous-algèbre simple maximale. L'intersection étant l'unique algèbre nilpotente non commutative d'ordre trois, engendrée par : $x_1=P_2+a_2+b_3$; $x_2=P_3+a_3-b_2$; $x_3=2(P_1+P_o)$, qui vérifie les relations de commutation : $(x_1,x_2) = x_3$; $(x_2,x_3) = (x_1,x_3) = i$ et qui est isomorphe à l'algèbre de Lie des matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle d'ordre 3, autrement dit l'algèbre de Lie H_1 des relations de commutation canonique. En outre, il n'existe pas d'algèbre unifiante $U(P,SU(2,1))$ (à un automorphisme près) distincte de $SU(2,2)$ et de $P \oplus SU(2,1)$.

On a des résultats analogues pour ce qui est de $U(P,G_{2,2})$: tout $U(P,G_{2,2})$ est isomorphe soit à $P \oplus G_{2,2}$ soit à $SO(4,3)$; dans ce dernier cas, l'intersection est également H_1. Aussi $SU(2,2)$ et $SO(4,3)$ sont appelées les algèbres unifiantes "exceptionnelles".

Si l'on veut éliminer le caractère nilpotent des P_α dans $SU(2,2)$ (qui fut considéré comme étant un désavantage de l'invariance conforme) ou, simplement, se placer à un niveau plus fin (que le niveau quantique habituel) où les P_α ne commutent plus entre eux, on peut considérer, par exemple, comme groupe externe, non pas le groupe de Poincaré, mais l'un des deux groupes de de Sitter $SO(4,1)$ et $SO(3,2)$ (quitte à redéfinir la masse) ; ce qui revient à interpréter les translations de l'espace-temps habituel comme limite de rotations dans l'espace quinta-dimensionnel. En tant que tels, ces derniers groupes sont intéressants au point de vue du formalisme externe et il y a eu plusieurs tentatives de leur étendre la théorie

de la relativité (voir par exemple [9]) ; qui plus est, si l'on admet que l'univers doit être homogène et uniforme dans le temps comme dans l'espace, les seules réalisations sont (outre l'espace plat de Minkowski habituel) les espaces riemanniens quadridimensionnels à courbure constante, à savoir les deux espaces de de Sitter : le premier est à courbure positive et de groupe de mouvement SO(4,1), le second est à courbure négative et de groupe de mouvement SO(3,2).

Nous allons indiquer un schéma d'unification tenant compte du fait que $SO(4,1)$ (qui est une sous-algèbre maximale non régulière * de $SO(4,2)$) est une déformée de l'algèbre de Poincaré.

Soit l'algèbre de Lie $SO_t(4,1)$ qui est engendrée par les générateurs $(M_{\alpha\beta}, M_{\alpha 5})$ de l'algèbre de de Sitter $SO(4,1)$ (pris dans $SO(4,2)$) avec les mêmes relations de commutations, sauf pour ce qui est de $(M_{5\alpha}, M_{5\beta}) = t^2 M_{\alpha\beta}$; autrement dit $SO_t(4,1)$ est exactement $SO(4,1)$ mais ramenée à la base $(M_{\alpha\beta}, t M_{5\alpha})$.

Les éléments $(M_{12}+M_{35}$; $M_{13}-M_{25}$; $M_{15}+M_{23}$; $M_{12}-M_{35}+2M_{06}$; $M_{10}+M_{26}$; $M_{20}-M_{16}$; $M_{30}-M_{56}$; $M_{50}+M_{36})$ forment une base d'une sous-algèbre (régulière) $SU(2,1)$ de l'algèbre $SO(4,2)$ qui intersecte $SO_t(4,1)$ sur la sous-algèbre $SO(3)$ engendrée par les trois premiers éléments, et

---

* On dit qu'une sous-algèbre B est régulière dans une algèbre de Lie A s'il existe une base de Weyl de A, correspondant à une sous-algèbre de Cartan, telle que cette sous-algèbre de Cartan possède une sous-algèbre dont les éléments associés dans la base de Weyl engendrent B ; en d'autres termes, son diagramme de Dynkin est un sous-diagramme de celui de A.

$SO(4,2)$ est somme (non directe) des espaces vectoriels sous-jacents. On a donc $SU(2,2) = U(SO_t(4,1), SU(2,1))$. Comme $\lim_{t\to o} SO_t(4,1) = P$, il vient d'après ce qui précède, que l'on a également $SU(2,2) = \lim_{t\to o} U(SO_t(4,1), SU(2,1))$, étant donné que l'algèbre limite unifie, non trivialement P et $SU(2,1)$.

Pour ce qui est de $SO(3,2)$, on aura de même une unification semblable de la façon suivante : soit l'algèbre $SO_t(3,2)$ obtenue à partir de l'algèbre de de Sitter $SO(3,2)$ (de $SO(4,2)$) via le changement de base $(M_{\alpha\beta}, M_{\alpha 6}) \to (M_{\alpha\beta}, t\, M_{\alpha 6})$; elles ont les mêmes relations de commutation, sauf pour ce qui est de $(M_{6\alpha}, M_{6\beta}) = -t^2 M_{\alpha\beta}$. On obtient alors $SU(2,2) = U(SO_t(3,2), SU(2,1))$ avec intersection sur la sous-algèbre $SL(2,R) = SO(2,1)$ engendrée par : $(M_{60} - M_{23}\ ,\ M_{62} + M_{30}\ ,\ M_{20} - M_{63})$, et l'on a de même $SU(2,2) = \lim_{t\to o} U(SO_t(3,2), SU(2,1))$. Il convient de noter que les deux facteurs de cette unification possèdent des sous-algèbres compactes maximales isomorphes ($SO(3) \times SO(2) = SU(2) \times SU(1)$), que ces deux exemples montrent qu'une unification (avec intersection) de deux algèbres semi-simples peut être semi-simple et non triviale, et de signaler une propriété remarquable des deux algèbres de de Sitter : toute déformation de l'algèbre de Poincaré est isomorphe à une des deux algèbres de de Sitter ; par conséquent, les seules algèbres qui peuvent se contracter dans Poincaré sont $SO(4,1)$ et $SO(3,2)$ [10/]. Le processus de déformation est obtenu en considérant l'algèbre de Lie A_t engendré par $(M_{\alpha\beta}, P_\alpha)$ avec les mêmes relations de commutation que celles de Poincaré, sauf pour ce qui est de $(P_\alpha, P_\beta) = t\, M_{\alpha\beta}$; si l'on pose $P_\alpha = \sqrt{|t|}\, M_{\alpha 5}$ on trouve $g_{55} = -1$ (resp. $+1$) si $t > 0$

(resp. < 0) , c'est à dire A_t est isomorphe à $SO(4,1)$ (resp. $SO(3,2)$) pour $t > 0$ (resp. < 0).

Il existe plusieurs possibilités d'appliquer le groupe SU(2,1) (dont on trouvera une analyse des représentations dans [11]) à la physique des hautes énergies qui, presque toutes, sont liées aux séries discrètes, et parmi lesquelles on peut mentionner les suivantes: —on peut établir, à partir des différentielles de ces représentations, un diagramme de poids infini dans un espace bidimensionnel [12] et associer les particules à certains de ses points ; dans un tel schéma (à l'opposé de la procédure habituelle basée sur SU(3)) les particules ne sont pas groupées en supermultiplets, ce qui représente un inconvénient pour une théorie des intéractions.—D'un point de vue différent, l'existence d'une connexion entre les représentations de la série discrète et les représentations de dimension finie [13] (indexées toutes les deux par deux nombres prenant des valeurs discrètes, existence de bases adéquates pour lesquelles elles sont données par les mêmes relations...) nous incite à considérer ces dernières (pour classer les particules en supermultiplets) dont on prendra les nombres quantiques (correspondant aux générateurs de la sous-algèbre compacte maximale $SU(2) \oplus U(1)$) comme étant l'isospin et l'hypercharge, par exemple ; si l'on veut retrouver l'unitarité, on les étendra "formellement", au moyen du principe de correspondance ci-dessus mentionné, aux représentations unitaires infinidimensionnelles correspondantes. Il convient de remarquer que $SU(2,2)$ lui-même peut être intéressant au point de vue du formalisme interne et ceci de la manière suivante [2] : Aux énergies d'intéractions fortes actuellement utilisées est associée l'algèbre interne forte $SU(2,1)$, l'uni-

fication étant un processus décrivant les niveaux de masse de la spectroscopie des particules ; à des énergies bien plus fortes, la masse matérielle sera négligeable par rapport à l'énergie mise en jeu dans l'intéraction, et l'unification $SU(2,2)$ deviendra, à la limite, l'algèbre du groupe d'invariance de ces "très fortes" intéractions. Dans un tel schéma, on peut classer les particules [14] soit par les valeurs propres des trois générateurs H_i (i = 1,2,3) de Weyl-Cartan (qui sont tous entier ou demi-entier dans les représentation de la série discrète) de SU(2,2), soit par celles de combinaisons linéaires convenables des H_i qui seront, alors, identifiées aux troisièmes composantes du spin et du spin isotopique et à l'hypercharge et retrouver par là même, la formule de Gell'Mann-Nishijima.

Une fois qu'on a choisi le procédé de classification externe et interne, il reste le problème délicat d'achever la classification selon $SU(2,2)$ tout entier. Pour ce faire, il est nécessaire de considérer le problème du spectre de certains éléments de l'algèbre enveloppante(comme l'opérateur masse) dans une représentation donnée ; c'est à dire, après le problème structurel, traiter le problème spectral.

L'esquisse de la solution a été débattue au cours d'une controverse qui a débuté par un résultat (encore) négatif [15] selon lequel le spectre (du carré) de la masse $g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta$ se réduisait à un point, ou bien ne contenait aucune valeur propre, pour toute algèbre de Lie d'ordre fini contenant celle du groupe de Poincaré. Cependant ce résultat s'est avéré être erroné, tant dans sa démonstration que dans sa formulation, des contre-exemples ont même été donnés [16]. Un résultat plus faible, dans le même ordre d'idées, a été ensuite obtenu [17].

Tous ces faits peuvent se résumer comme suit :-pour toute représentation continue, unitaire, irréductible, d'un groupe de Lie d'ordre fini contenant le groupe de Poincaré, le spectre de l'opérateur représentant $g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta$ est un ensemble connexe. Ceci exclut dans ce cas la possibilité d'avoir plusieurs valeurs propres isolées, mais non pas plusieurs valeurs propres à "fond continu".-Dans le cas de représentations locales de l'algèbre unifiante, on peut avoir un spectre de masse purement ponctuel. Il en est de même pour les représentations globales des groupes de Lie d'ordre infini. Ce qui nous conduit aux deux remarques suivantes :

1/ Si l'on veut rester dans un cadre relativement traditionnel, on peut considérer que le principe de classification pourrait relier (via une technique du type représentations induites, par exemple) certaines représentations du groupe interne (représentations de "classification" agissant sur les champs associés aux particules, donc non nécessairement unitaires) à certaines représentations ("spectrales") de dimension infinie, unitaire du groupe unifiant (ou bien anti-symétriques à prolongements auto-adjoints de son algèbre de Lie) agissant sur des "états" ; dans ces dernières (qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement irréductibles) le spectre de l'opérateur (auto-adjoint) $M = g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta$ donnera, comme nous allons l'expliquer, le spectre de masse. En effet, si $M = \int \lambda \, dE(\lambda)$ est sa décomposition spectrale et m^2 en est une valeur propre associée au vecteur propre normé ψ, on a $\langle M \psi | \psi \rangle = m^2 = \int \lambda \langle dE(\lambda) \psi | \psi \rangle$; la mesure spectrale scalaire $d\mu_\psi = \langle dE(\lambda) \psi | \psi \rangle$ est ainsi la mesure de Dirac δ_{m^2} en m^2. Il se peut donc très bien que, même si M n'a pas de valeurs propres, pour certains φ, $d\mu_\varphi$ soit "voisine" d'une mesure δ en un point m^2, et l'on pourra interpréter m comme une valeur propre approchée de la masse.

En particulier, si $d\mu_\varphi$ possède une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) représentée par une fonction en cloche, nous aurons une interprétation de la largeur de la résonnance de la masse m.

2/ Si l'on veut un spectre discret, au sens orthodoxe du terme, on est amené à l'étude des représentations locales (non intégrables aux groupes correspondants) si l'on reste dans le cadre des algèbres de dimension finie.

Or, jusqu'à une période très récente, l'étude des représentations locales de groupes de Lie n'étaient qu'un accéssoire pour la détermination de leurs représentations globales. Aussi (à quelques exceptions près), seules les différentielles de ces dernières étaient considérées ; quant aux représentations locales en général, elles semblent encore méconnues de la majorité des physiciens (peut-être essentiellement à cause des problèmes mathématiques difficiles qu'elles soulèvent), en dépit de nouvelles idées qui ont acquis droit de cité (cf. l'analyse du paragraphe III.1) non seulement au niveau phénoménologique (moment angulaire complexe, trajectoire de Regge...) mais également à celui du formalisme externe ; étant donné qu'à ce niveau, les distances rentrant en jeu sont très petites, l'action locale est plus plausible.

I.6. L'approche groupe "dynamique"

Un des problèmes essentiels qui se pose dans l'étude d'un système physique (dont on connait la dynamique) est la résolution des équations différentielles qui le décrivent (équations de mouvement, de Schrödinger, de champ...), ce qui revient, généralement, à ré-

soudre un problème spectral. Or, une telle entreprise est souvent difficile de mener à terme (exceptés quelques cas particuliers), ceci étant dû à l'absence, à l'heure actuelle, d'une méthode générale et à l'introduction de potentiels de moins en moins communs. La première tentative d'une approche globale est la méthode de factorisation dont le mérite (comme le passage du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien) est de remplacer une équation du second ordre par un système de deux équations du premier ordre, possédant en outre des propriétés spécifiques qui facilitent la résolution et la ramènent au domaine des fonctions spéciales dont on connait plusieurs équations différentielles, des représentations intégrales, des théorèmes d'addition, des formules de récurrence ... ce dont on a besoin pour les développements ultérieurs. Une autre approche [2/] a consisté en la détermination d'une classe de potentiels solubles tels que les équations de Scrödinger associées puissent être résolues à l'aide de fonctions connues. Quant à l'exploitation de la symétrie du système (ou de son hamiltonien), elle ne fut exploitée, au départ, qu'en des situations spéciales (atome d'hydrogène, oscillateur harmonique) où les groupes mis en jeu sont compacts [3/], la théorie des groupes non compacts était rudimentaire ; ce qui permit tout au plus une analyse partielle du problème. Il convient de noter que, jusqu'à une période récente, si l'on excepte les symétries d'espace-temps, seuls les groupes compacts étaient regardés comme groupes de symétrie éventuelle [4/].

Les premiers travaux sur l'unification des symétries externes et internes ont amené les physiciens à envisager l'utilisation de groupes non compacts dont la théorie des représentations (où les problèmes spectraux et les fonctions spéciales font partie intégrante de

la matrière d'œuvre) s'est développée d'abord (et non depuis) à l'insu de la physique-mathématique. Depuis l'application de tels groupes dans la résolution des équations physiques ne fait que croître et a permis de décrire le spectre d'énergie (discret ou continu) de plus d'un système (simple ou composite, sans ou avec intéraction...), ceci (en substance) de la manière suivante [5] : on considère une algèbre de Lie donnée qu'on réalise en fonction des "entités" qui rentrent dans l'expression de l'hamiltonien H du système (telles que positions, impulsions, matrices de Pauli ou de Dirac, opérateurs de création et d'annihilation...) et l'on exprime $A(H-\lambda)$, où A est un opérateur inversible et λ un paramètre associé à l'énergie, en une combinaison linéaire des générateurs de l'algèbre de Lie de départ (qui possède, en outre, des générateurs capables de transformer $A(H-\lambda)$ en un génrateur compact ou non compact selon que l'on s'intéresse au spectre discret ou continu). On ramène, de cette façon, la spectralité de l'hamiltonien à l'étude de la représentation de l'algèbre de Lie ainsi construite qui se trouve être, en général, irréductible symétrique et intégrable, afin que l'hamiltonien (ou son transformé), plongé dans une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre enveloppante, puisse contribuer à sa caractérisation, la signification physique des générateurs se déduisant du contenu physique des relations de commutation. Aussi, elle apparait comme étant une algèbre d'invariance des états ; cependant on l'appelle (par abus de langage) algèbre "dynamique" du système bien que son origine ne soit pas essentiellement dynamique. D'ailleurs, il est évident, qu'avec ce formalisme, l'algèbre "dynamique" (et la représentation associée) d'un système physique donné est loin d'être unique ; le choix étant assujetti, entre autres,

aux conclusions qu'on veut bien tirer d'un tel schéma et à l'existence de générateurs qui (par leurs relations de commutations) peuvent représenter certaines grandeurs physiques, observables ou inobservables (telles que les vecteurs potentiel ou courant) ou servir simplement d'auxilliaire dans les calculs (tels que les probabilités de transition), le mot de la fin devant appartenir évidemment à l'adhésion des résultats expérimentaux. De ce point de vue, le groupe conforme, par la richesse de sa structure, a servi comme algèbre "dynamique" pour différents systèmes physiques dont le plus populaire est l'exemple de l'atome d'hydrogène. Le fait qu'il contienne le groupe (et des générateurs tensoriels) de Lorentz a amené certains auteurs [5/ 6/] à construire des équations de champ basées sur certaines de ses représentations de dimension finie (donc non unitaires), éventuellement réductibles sous les deux groupes, généralisant ainsi les idées de Dirac. On retrouve, dans [6-b/] une variante de l'approche de [7/] pour la physique du neutrino.

Relaxant quelque peu les hypothèses de départ (essentiellement la connaissance de la dynamique) le groupe conforme fut considéré comme un groupe agissant sur des supermultiplets infinis de hadrons [8/], autrement dit sur les indices de champ ayant une infinité de composantes (se transformant sous des représentations de dimension infinie du groupe de Lorentz homogène, généralisant par là même les idées de Majorana). Certains des générateurs auto-adjoints de ses représentations unitaires irréductibles furent utilisées pour construire de telles équations de champ. L'inflexion des données n'a pas été suivie d'inflexion d'interprétation, ce qui a conduit naturellement a des "No-go theorem" [9/] (communs à tous ces types d'équations) dont le

plus important est la violation du théorème TCP et du spin-statistique (ce dernier fait a déjà été mentionné [10/] dès 1949, en ce qui concerne les équations de Gel'fand-Yaglom) et dont une preuve axiomatique peut être déduite du fait que le théorème de Bargmann-Hall-Wightman [11/] (qui est le fondement de la preuve axiomatique) cesse d'être valable en représentation infini-dimensionnelle du groupe de Lorentz.

D'un point de vue similaire, il est fort probable que les difficultés et les contradictions rencontrées dans la recherche de l'origine dynamique des symétries unitaires (cf. par exemple [12/]) reposent également sur la détermination de vouloir interpréter d'une façon orthodoxe une symétrie empirique, et il est bien possible que de tels groupes ne soient pas des groupes d'invariance d'un hamiltonien.

Aussi, si l'on considère le groupe conforme comme groupe d'invariance de l'espace-temps en théorie des champs, le fait qu'il se différencie de la majorité des groupes rencontrés en physique par son action non linéaire dans l'espace de Minkowski nous invite à regarder avec prudence la convariance des équations des champs selon ce groupe et l'interprétation des générateurs extra-Poincaré, ce qui constituera la matière du prochain paragraphe.

I.7. Covariance conforme des équations de champ

Depuis l'introduction du groupe conforme en physique, par Cunningham et Bateman, et jusqu'à une période très récente, il a été toujours signalé que seules les équations décrivant le mouvement de particules de masse nulle sont covariantes conforme ; cette restric-

tion étant due au fait que ce groupe contenant des dilatations globales et locales (transformations conformes spéciales), seules les masses nulles vont être invariantes sous de telles transformations. Ce privilège apparent des particules non massives (dépourvu d'ailleurs de toute origine physique) peut être esquivé si l'on ajuste l'interprétation des transformations qui y sont l'essence ou l'on réexamine le concept même de masse relativiste ; d'autant plus que la physique nous offre une conjoncture analogue qui peut nous inspirer : en effet la masse de Galilée-Newton n'est pas invariante sous les transformations de Lorentz, l'invariant étant la masse relativiste au repos qui, à son tour, n'est pas un invariant conforme. Aussi si l'on interprète les cinq générateurs, responsables de cette asymétrie entre particules massives et non massives, comme étant simplement des transformations passives permettant uniquement la possibilité de changer l'unité d'échelle d'une façon dépendante du point de l'espace-temps, on n'a plus aucune difficulté d'interpréter le groupe conforme comme étant un groupe de symétrie exacte. Ce qui revient à supposer l'invariance des lois physiques par changement des unités de mesure et à observer qu'une transformation conforme induit, sur le référentiel de l'observateur, une transformation de Lorentz suivie d'un changement (local) d'unités. Si l'on adhère à ce point de vue, il est nécessaire d'adopter une définition cohérente de la covariance sous le groupe conforme, en concordance avec la covariance relativiste (sous le groupe de Poincaré) habituelle qui s'énonce comme suit : $\psi(\underline{x})$ étant un champ classique (en première quantification) solution de l'équation aux dérivées partielles $A(\partial)\ \psi(\underline{x}) = 0$ où $A(\partial)$ est un opérateur différentiel, la covariance relativiste signifie que si le point $\underline{x}$ de l'espace de

Minkowski se transforme, sous le groupe de Poincaré, en $\underline{x}' = \Lambda\underline{x} + \underline{a}$, le champ $\psi(\underline{x})$ se cotransforme suivant $\psi'(\underline{x}') = S(A)\,\psi(\underline{x})$ (où $\pm A \to \Lambda$ dans l'homomorphisme de recouvrment $SL(2,C) \to L_+^\uparrow$ et S est une représentation de dimension finie de SL(2,C) qui exprime le caractère (tansoriel ou spinoriel...) du champ en question) de telle sorte que $A(\partial)\,\psi(\underline{x})$ s'écrive de façon similaire dans le nouveau système de coordonnées, soit $A(\partial')\,\psi'(\underline{x}') = 0$.

Or, un grand tohu-bohu a prédominé la plupart de telles tentatives où l'on s'est toujours accomodé d'une généralisation formelle de la définition précédente, sans mettre en évidence la loi de transformation des champs qui doit prévaloir dans toute extension, étant donné que les $\underline{x}$ (dans le cadre de la seconde quantification où les champs sont les variables dynamiques) ne sont plus guère que des indices, et ce n'est que tout récemment qu'une définition cohérente fut proposée [1]. Sa quiddité est de partir en sens inverse de la démarche familière en se demandant quelles sont les transformations les plus générales sur $\psi(\underline{x})$ qui induisent sur les $\underline{x}$ les transformations de Poincaré de telle sorte que $A(\partial)\,\psi(\underline{x}) = 0$ implique $A(\partial')\,\psi'(\underline{x}') = 0$. Cette approche, qui a déjà donné des résultats prometteurs en physique du neutrino [2] (via l'équation de Dirac-Weyl) et qui a permis d'élucider la covariance de l'équation de Schrödinger [3], suggère d'entreprendre une étude systématique des groupes de covariance des équations de champs, compatibles avec la covariance relativiste ; une telle étude pouvant mener, éventuellement, à des groupes à un nombre infini de paramètres.

L'extension des notions de champ et de covariance conformes s'insère, de façon canonique, dans le cadre de cette généralisation :

Soient M l'espace de Minkowski, E un espace vectoriel réel ou complexe et Φ un espace de transformations ψ de M dans E ($\psi : M \ni \underline{x} \to \psi(\underline{x}) \in E$). Soit S une représentation (finie) de SL(2,C) dans E. Supposons qu'à chaque couple $(t,\underline{x}) \in C_o \times M$, il correspond un opérateur $S(t,\underline{x})$ dans E tel que

1/ $S(tt',\underline{x}) = S(t,t'\underline{x})\, S(t',\underline{x})$

toutes les fois que les deux membres sont définis

2/ $S(t,\underline{x}) = S(A)$ pour $t = (\Lambda,\underline{a}) \in P$ et où $\pm A \to \Lambda$ dans l'homomorphisme de recouvrement

$\psi \in \Phi$ est dit champ conforme si, $\underline{x}$ se transformant sous le groupe conforme en $\underline{x}' = t\underline{x}$, $\psi(\underline{x})$ se cotransforme suivant $\psi(\underline{x}) \to \psi'(\underline{x}') = S(t,\underline{x})\, \psi(\underline{x})$. Dans ces conditions, si $\psi(\underline{x})$ est un champ conforme, l'équation $A(\partial)\, \psi(\underline{x}) = 0$ est dite covariante conforme si elle devient $A(\partial')\, \psi'(\underline{x}')$ quand ψ se cotransforme comme ci-dessus.

Aussi le problème crucial est la détermination du champ opératoriel $S(t,\underline{x})$. Moyennant simplement une hypothèse d'analycité locale (qui s'introduit naturellement à partir de la singularité des transformations conformes et qui n'altère en rien le résultat physique escompté) et pour un choix donné de la représentation de SL(2,C) sous-jacente, les seules matrices S de covariance, ayant un sens physique sont données par : $S(\lambda,\underline{a},\underline{x}) = \Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x})^n\, S_o(\underline{a},\underline{x})$ pour une transformation conforme spéciale $x'^\alpha = \Omega_\lambda^{-1}(\underline{a},\underline{x})\, (x^\alpha + \underline{x}^2 a^\alpha)$ ($\Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x}) = \lambda^{-1}(1+2\underline{a},\underline{x} + \underline{a}^2\, \underline{x}^2)$) où la matrice $S_o(\underline{a},\underline{x})$ est la solution unique du système d'équations différentielles matricielles :

$$\partial\, S_o(\underline{a},\underline{x}) \,/\, \partial x^\mu = N_\mu(\underline{a},\underline{x})\, S_o(\underline{a},\underline{x})$$

$$N_\mu(\underline{a},\underline{x}) = 2\, a^\nu\, m_{\nu\mu} + 2\Omega(\underline{a},\underline{x})^{-1}\,(x^\rho + \underline{x}^2\, a^\rho)(2\, a_\mu\, a^\nu\, m_{\rho,} + \underline{a}^2\, m_{\mu\rho})$$

avec les conditions initiales $S_o(\underline{a},0) = 1$ et $m_{\nu\mu}$ étant les générateurs infinitésimaux de la représentation de SL(2,C) considérée. En outre, n est un entier ou demi-entier algébrique appelé la dimension conforme du champ.

De là, il découle [4/] que, si le champ est tensoriel (p fois covariant et q fois contravariant), sa loi de transformation est donnée par

$$\psi'_{\mu_1..\mu_p}{}^{\nu_1..\nu_q}(\underline{x}') = \Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x})^n\left[\Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x})^{q-p}\left(\prod_{i=1}^{p}\partial'_{\mu_i}\, x^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q}\partial_{\beta_j}\, x'^{\nu_j}\right)\right]\psi_{\alpha_1..\alpha_p}{}^{\beta_1..\beta_q}(\underline{x})$$

autrement dit S_o est complètement déterminée par les transformations de coordonnées ; mais si le champ est spinoriel, on a

$$\psi'(\underline{x}') = \Omega_\lambda\,(\underline{a},\underline{x})\; S(\underline{x})\; \psi(\underline{x})$$

où $S(\underline{x})$ est une matrice unimodulaire. En conséquence, si l'on considère une équation de champ tensoriel, la démonstration de sa covariance conforme nécessite simplement la détermination de la dimension n du champ ; mais si le champ est spinoriel, il faut en outre déterminer $S(\underline{x})$.

On peut bien entendu définir la dimension conforme des grandeurs cinématiques. ds a la dimension conforme -1 ; le carré de la vitesse étant un scalaire conforme (n=0), il résulte que la vitesse de la lumière C est un invariant conforme. On vérifie qu'il en est de même du carré e^2 de la charge électrique. Pour qu'il y ait une liaison entre la dimension physique et la dimension conforme, il est souhaitable que les quantités sans dimension physique soient de dimension

conforme zéro. Ainsi, on peut postuler que $e^2/\hbar c$ est un scalaire conforme de dimension zéro ; il en sera alors de même de $\hbar$. Par suite la masse et l'énergie auront la dimension conforme un ; la densité d'énergie a la dimension conforme quatre... De là, il s'ensuit que la loi de transformation de la masse $m \to m' = \Omega_\lambda(\underline{a},\underline{x})$ nous permet de donner un sens nouveau et cohérent, à la covariance conforme des équations de champs, associés aussi bien à des particules massives que nulles, contrairement à ce qu'on rencontre habituellement dans la littérature.

Tout ce qui a été dit en première quantification se transcrit en seconde quantification où les ψ seront des distributions à valeurs opérat**o**rielles, c'est à dire des applications linéaires faiblement continues de l'espace des fonctions-test sur M (à décroissance rapide ou à support compact) à valeurs dans l'espace $\mathcal{O}_p(H) \otimes E$, E étant un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{O}_p(H)$ un espace d'opérateurs (non bornés en général) ayant un domaine dense, invariant et commun dans l'espace des états H (pour de plus amples informations cf. [1/]).

Pour ce qui concerne les conditions de covariance des équations de champ dérivant d'un lagrangien local (dont l'expression ne dépend que de la valeur du champ et de ses dérivées premières en chaque point) $L(\psi, \partial_\mu \psi, m)$ qui est déjà supposé invariant relativiste (si $\underline{x} \to \underline{x}' = \Lambda\underline{x} + \underline{a}$ et $\psi(\underline{x}) \to \psi'(\underline{x}') = S(A)\,\psi(\underline{x})$, où A est une image réciproque de Λ dans l'homomorphisme de recouvrement, alors $L(\psi', \partial'_\mu \psi', m)_{\underline{x}'} = L(\psi, \partial_\mu \psi, m)\,\underline{x}$), on a le résultat fondamental suivant : si L est invariant d'échelle, c'est à dire pour tout $\lambda \in R_+^\times$, il existe n tel que $L(\lambda^{-n}\psi, \lambda^{-(n+1)}\partial_\mu \psi\ , \lambda^{-1}m)_{\underline{x}} = \lambda^{-4} L(\psi, \partial_\mu \psi, m)\underline{x}$,

alors les équations de champ dérivées de L sont covariantes conformes, avec $\psi'(\underline{x}') = \Omega^n(t,\underline{x})\ S_o(t,\underline{x})\ \psi(\underline{x})$, si et seulement si $\delta\int R_\mu\ d^4\underline{x} = 0$ où $R_\mu = ((ng_{\mu\nu} + m_{\mu\nu})\psi)^i \partial\ L/\partial(\partial_\nu\psi^i)$.

Ce résultat s'étend, sans difficulté, au cas où l'on a plusieurs champs ψ_k (et éventuellement des constantes de couplage que l'on doit transformer suivant leur dimension) ; on doit, dans ces conditions introduire leur degré respectif n_k et sommer sur k pour obtenir R_μ.

Il convient de noter que cette condition nécessaire et suffisante de covariance est, contrairement à certains résultats de [5/], purement géométrique et indépendante de la dynamique traitée.

Il s'ensuit que, dans les cas physiquement intéressants, si n est la dimension conforme du champ et J son spin, on a la relation $n = j+1$ (ou plus généralement la relation plus faible $(-1)^{2n}=(-1)^{2J}$) autrement dit $(-1)^{2n}$ admet des signes opposés pour les bosons et les fermions, ce qui implique une connexion entre la dimension conforme, le type de statistique qui caractérise le champ et le nombre quantique interne B+L (puisque l'on avait par ailleurs $(-1)^{2J} = (-1)^{B+L}$).
On trouvera à la fin de ce paragraphe un tableau où figure les principales équations covariantes conformes, avec la dimension du champ associé, et duquel il se dégage (à partir des équations de Maxwell) qu'une grande attention doit accompagner les théories invariantes de jauge : en effet les équations de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, où $L = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$, sont covariantes conformes avec $n = 2$. Si l'on conserve la condition de jauge habituelle $\partial_\mu A^\mu = 0$, elle n'est pas covariante conforme, puisque une condition nécessaire et

suffisante pour qu'elle le soit est que A^μ soit de degré conforme 3, alors que la covariance des équations de Maxwell nous impose n = 1 (il est fort étonnant qu'une telle anomalie soit passée inaperçue ; qui plus est, les équations de Maxwell sont la source même de l'introduction du groupe conforme en physique). Néanmoins, on peut esquiver cette difficulté en substituant la condition de jauge habituelle ($\partial_\mu A^\mu = 0$) à une autre qui soit covariante conforme avec le degré un souhaité par les A^μ , par exemple $\partial_\mu (A_\alpha A^\alpha A^\mu) = 0$; moyennant une analyse des conséquences physiques.

Il est souhaitable de chercher (du moins dans ses grandes lignes) une classification de toutes les équations de champ covariantes conformes. Une tentative dans ce sens a été amorcée dans [6] en jumelant les résultats de [1] et les méthodes de [7] ; malheureusement elle n'aboutit qu'à une classe d'équations du premier ordre dont la covariance conforme est déjà connue (tout au moins, en ce qui concerne celles qui sont physiquement intéressantes).

PRINCIPALES EQUATIONS COVARIANTES CONFORMES 1/ 8/

NOMS	EQUATIONS	d° conforme	cas particulier
Klein-Gordon	$(\Box+m^2)\psi = 0$	n = 1	
Maxwell	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	n = 2	
Potentiel e.m.	$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0$	n = 1	
Proca	$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 U^\nu = 0 \\ F^{\mu\nu} = \partial^\mu U^\nu - \partial^\nu U^\mu = 0 \end{cases}$	$F^{\mu\nu}$: n=2 U^μ : n=1	
Weinberg Tensorielles	$\partial_{\mu_1} F_{\pm}^{(\mu_1\nu_1)\cdots(\mu_j\nu_j)} = 0$	n=j+1	Maxwell
Dirac-Fierz	$\begin{cases} \partial_{\alpha_1\dot\beta} \chi^{\alpha_1\cdots\alpha_{2j}} = 0 \\ \partial_{\alpha\dot\beta_1} \psi^{\dot\beta_1\cdots\dot\beta_{2j}} = 0 \end{cases}$	n=j+1	Neutrino Maxwell
Weinberg m≠0	$(\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2j}} \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2j}} + m^{2j})\psi = 0$	n=2-j	Dirac
Tenseur Symétrique à trace nulle	$\partial_{\mu_1} \psi^{\mu_1\cdots\mu_{2j}} = 0$	n=2j+2	Condition de Lorentz
Gårding	$\partial_{\alpha_1\dot\alpha_1} \psi^{\alpha_1\cdots\alpha_{2j}\,\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_{2j'}}$	n=j+j'+2	Condition de Lorentz

DEUXIEME CHAPITRE : DEFINITIONS ET PROPRIETES STRUCTURALES DES GROUPES P_2 ET $H_4 \Lambda SL(2,C)$.*

II.1. Sur le quantum de longueur

Ainsi que nous l'avons expliqué dans l'introduction générale, nous avons à adjoindre aux dix générateurs du groupe de Poincaré quatre autres susceptibles d'une interprétation physique de sorte que le tout constitue un système de générateurs d'un groupe de Lie à quatorze paramètres. Or, parmi les observables latentes, qui peuvent se présenter sous forme d'un quadri-générateur, on peut relever la position ; celle-ci a reçu une grande variété de développements (cf. les références de [1/], essentiellement dans sa formulation tridimensionnelle, abord qui trouble nécessairement la symétrie relativiste entre les coordonnées d'espace et de temps) souvent contradictoires, mais toujours dans le cadre d'un espace-temps continu. Cette dernière hypothèse a pour conséquence (ô combien non négligeable) la possibilité de pouvoir considérer des intervalles aussi petits que nous voulons et d'acquérir, par là même, la faculté d'exprimer les lois physiques sous forme d'équations différentielles. Cependant, pour pouvoir affirmer comment telle ou telle grandeur physique varie sur des intervalles ultra-petits, il est nécessaire que nous soyons capables de relever la mesure de tels intervalles ;

---

* Ce chapitre reprend, à quelques points de forme et de présentation près, l'article [1/].

or les concepts de distance mesurée à la règle et de temps repéré sur une horloge sont incontestablement inapplicables à ces échelles (ceci étant valable en mécanique relativiste aussi bien que dans l'approximation non relativiste). La difficulté peut être résorbée si l'on suppose que l'espace-temps est quantifié (du moins pour les petites échelles), et si l'on verse les coordonnées spatio-temporelles soit parmi les variables physiques qui ne peuvent être mesurées simultanément avec une précision meilleure qu'une certaine limite, soit parmi celles qui sont quantifiées au sens habituel du terme (variant d'une façon discontinue) ; ce qui imposerait des restrictions à nos mesures et pourrait impliquer l'existence d'un intervalle de longueur "élémentaire" qui serait, à l'instar de la constante de planck h et la vitesse de la lumière c, une constante universelle à la base de toutes les mesures aux échelles ultra-petites. D'ailleurs, une telle conjecture est fort probable, ne serait-ce que du point de vue de l'analyse dimensionnelle habituelle : c et h s'expriment en fonction des trois unités fondamentales CGS, par exemple, ce qui représente un système de deux équations à trois inconnues ; d'où un besoin naturel d'une troisième constante universelle et d'une troisième équation. Une telle perspective fournirait alors une base canonique (constituée par les trois constantes universelles) pour la création d'un système d'unités universel. Il existe du reste une raison plus fondamentale qui a amené plusieurs physiciens [2/] à admettre la possibilité de l'existence d'un quantum de longueur et à en donner même l'ordre de grandeur. Le raisonnement est essentiellement fondé sur le problème des divergences, aussi bien en électrodynamique classique que quantique, qui découle du fait que l'impulsion pourrait être aussi grande que l'on veut ; aussi l'existence d'une limite finie pour la plus petite longueur mesu-

rable l'éliminerait de prime abord, puisque, impliquant une limite inférieure pour les longueurs d'onde, elle bornerait supérieurement le spectre des impulsions.
De telles situations se rencontrent également en relativité générale, ainsi plusieurs auteurs [3/] admettent que la quantification du champ de gravitation et sa signification géométrique conduisent naturellement à une quantification de la géométrie.

Dans cette éventualité, la mécanique quantique relativiste serait une approximation d'une théorie plus générale qui ferait intervenir, outre c et h, une troisième constante universelle ayant la signification d'une longueur élémentaire.

Observons enfin que même dans l'approximation non-relativiste de la mécanique quantique, les relations de Heisenberg $(q_i, p_j) = \delta_{ij}$ habituelles peuvent engendrer une variable position quantifiée : il suffit, par exemple, soit de considérer des représentations locales non intégrables au groupe de Heisenberg correspondant, soit d'adopter une définition de commutation généralisée (pour les opérateurs non bornés) à la manière de [4/].

II.2. Introduction du groupe P_2

A la lumière de la discussion précédente, nous allons interpréter les quatres générateurs extra-Poincaré (Q^α) $(\alpha = 0,1,2,3)$ comme étant la position (les coordonnées de l'espace-temps). Etant donné que ce niveau de départ va représenter l'aspect le plus "classique" de notre modèle (l'ascension dans la hiérarchie des niveaux

devant se faire, par la suite, au moyen des représentations projectives et des déformations, et les propriétés initiales des (Q^α) allant en s'amenuisant) il parait légitime de supposer que les (Q^α) vérifient, à ce stade, des hypothèses très fortes, et naturel d'y inclure celles que les positions précédemment proposées dans la littérature, dans le cadre habituel, ne pouvaient satisfaire : la simultanéité de la localité et la covariance (un quadri-opérateur est dit local si ses composantes commutent et covariant si elles se transforment comme celles d'un quadri-vecteur sous l'effet des transformations de Lorentz). En conséquence, nous devons supposer les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} \left(Q^\alpha , Q^\beta\right) &= 0 \\ \left(M^{\alpha\beta}, Q^\gamma\right) &= g^{\beta\gamma} Q^\alpha - g^{\alpha\gamma} Q^\beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Si l'on veut, à l'instar du groupe de Galilée ou simplement que le groupe cherché soit une inhomogénéisation du groupe de Lorentz, on doit supposer en outre

$$\left(P^\alpha , Q^\beta\right) = 0 \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2), jointes à celles de Poincaré, nous définissent alors l'algèbre de Lie $(T_4 \oplus T'_4) \textcircled{s} SO(3,1)$, où T_4 et T'_4 sont deux idéaux abéliens à quatre dimensions engendrés respectivement par les (P^α) et les (Q^β) , la somme semi-directe (qui est une inhomogénéisation dans ce cas) est définie par la représentation $D(1/2,1/2) \oplus D(1/2,1/2)$ du groupe de Lorentz homogène (pour ce qui concerne les représentations du groupe de Lorentz cf. [5]).

Aussi cette algèbre que nous noterons P_2 est une unification [6] de deux algèbres de Poincaré, avec intersection égale à l'algèbre de

Lorentz. Elle engendre le groupe connexe :

$P_2 = (T_4 \times T'_4) \wedge SO_o(3,1)$ d'élément générique $(\underline{a},\underline{b},\Lambda)$

où $\underline{a},\underline{b} \in R^4$ et $\Lambda \in SO_o(3,1)$.

Son groupe de recouvrement universel $\tilde{P}_2 = (T_4 \times T'_4) \wedge SL(2,C)$ est constitué par les triplets $(\underline{a},\underline{b},A)$; $\underline{a},\underline{b} \in R^4$ et $A \in SL(2,C)$; la loi de groupe s'écrit

$$(\underline{a}_1,\underline{b}_1,A_1)(\underline{a}_2,\underline{b}_2,A_2) = (\underline{a}_1+\Lambda(A_1)\underline{a}_2 \ , \ \underline{b}_1 + \Lambda(A_1)\ \underline{b}_2, \ A_1\ A_2) \qquad (3)$$

où Λ est l'homomorphisme de recouvrement $SL(2,C) \to SO_o(3,1)$.

L'élément neutre et l'inverse sont donnés par

$(e = 0,0,1)$

$$(\underline{a},\underline{b},A)^{-1} = (-\ \Lambda(A)^{-1}\ \underline{a}\ , -\ \Lambda(A)^{-1}\ \underline{b}\ , A^{-1}) \qquad (4)$$

$\tilde{P}_2$ est un revêtement d'ordre 2 de P_2 puisque $(\underline{a},\underline{b},\pm A)$ déterminent le même élément $(\underline{a},\underline{b},\Lambda(A))$.

La phase suivante, dans le dessein que nous nous sommes tracé, consiste à la détermination des représentations projectives du groupe P_2. Mais auparavant, nous allons rappeler les principaux résultats, aussi bien physiques que mathématiques, de cette théorie que est due principalement à Wigner [7] et Bargmann [8].

II.3. Représentation projectives

L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur normé ψ appartenant à un espace de Hilbert H. Cependant, tout vecteur $e^{i\theta}\ \psi$ représente le même état. En conséquence, les états sont en correspondance biunivoque avec les "rayons" de l'espace de Hilbert H (qu'on suppose être un sous-espace cohérent, s'il y a des règles de

supersélection) ; un rayon $\vec{\psi}$ étant la classe des vecteurs ($e^{i\theta}\psi, \theta \in R$). La probabilité de transition d'un état $\vec{\psi}$ à un état $\vec{\varphi}$ est donnée par $|\langle\psi|\varphi\rangle|$, où ψ et φ sont deux représentants quelconques des classes $\vec{\psi}$ et $\vec{\varphi}$. Si G est un groupe de symétrie du système, à tout $g \in G$ va correspondre une application biunivoque de l'ensemble des états physiques du système sur lui-même $\vec{\psi} \to \vec{\psi}'$, cette application devant conserver évidemment les probabilités de transition. Un résultat dû à Wigner [9] affirme que la correspondance entre rayons, ainsi définie, peut toujours être réalisée par une correspondance entre vecteurs de l'espace de Hilbert au moyen d'un opérateur unitaire ou antiunitaire U_g. L'opérateur U_g pourrait être remplacé par $e^{i\theta} U_g$ sans changer en rien la correspondance entre rayons. On peut donc considérer U_g comme étant le représentant d'un opérateur "rayon" $\vec{U}_g$ (ensemble de tous les opérateurs de la forme $e^{i\theta} U_g$) qu'on pourra choisir d'une façon commode. Si on sélectionne un représentant U_g dans chaque classe $\vec{U}_g$, on obtient

$$U_g U_{g'} = \omega(g,g') U_{gg'}, \quad \text{où} \quad |\omega(g,g')| = 1 \qquad (5)$$

et les éléments g de la composante connexe de l'identité de G sont représentés par des opérateurs unitaires.

Plus généralement, on appelle représentation projective d'un groupe G une application de G dans l'ensemble des opérateurs inversibles d'un espace de Hilbert (pour le cas qui nous intéresse) qui envoie $g \to U_g$ et vérifie (5), $\omega(g,g')$ étant une fonction complexe, définie sur $G \times G$, appelée le facteur local de la représentation projective considérée.

Le facteur $\omega(g,g')$ n'est pas quelconque car il doit vérifier la relation suivante, déduite de l'associativité de G

$$\omega(g_1,g_2)\ \omega(g_1g_2,g_3) = \omega(g_1,g_2g_3)\ \omega(g_2,g_3) \qquad (6)$$

Les représentations :

$$g \to U_g \qquad \text{et} \qquad g \to U'_g = e^{i\alpha(g)}\ U_g$$

sont physiquement équivalentes, ce qui nous introduit la notion d'équivalence sur les facteurs locaux : deux facteurs ω et ω' sont dits équivalents s'il existe une fonction réelle $\alpha : g \to \alpha(g)$ telle que

$$\omega(g,g') = \omega'(g,g')\ \ e^{i\{\alpha(g)+\alpha(g')-\alpha(gg')\}} \qquad (7)$$

Dans le cas où la classe d'équivalence du facteur est l'identité, la représentation est dite représentation "vectorielle" ou "vraie représentation".

Plus généralement : deux représentations projectives unitaires U_g et V_g sont dites "projectivement équivalentes" s'il existe un opérateur unitaire A et une fonction α sur G tels que

$$U_g = e^{i\alpha(g)}\ A\ V_g\ A^{-1}$$

les facteurs locaux de deux telles représentations sont évidemment équivalentes.

Aussi si l'on veut déterminer tous les systèmes quantiques qui admettent G pour groupe de symétrie, on doit déterminer toutes les représentations projectives unitaires ou antiunitaires du groupe G.

Dans l'analyse de Bargmann, un rôle fondamental est joué par l'exposant infinitésimal X. Il est défini pour chaque couple d'élé-

ments de l'algèbre de Lie G du groupe de Lie par la relation

$$X(A,B) = \lim_{\tau \to 0} \tau^{-2} \left(\beta((\tau A)(\tau B), (\tau A)^{-1}(\tau B)^{-1}) + \beta(\tau A, \tau B) + \beta(-\tau A, -\tau B) \right) \quad (8)$$

au voisinage de l'unité, où β est l'exposant local défini par

$$\omega(g,g') = e^{i\beta(g,g')} \quad (9)$$

C'est une fonction réelle de g et g' ; elle n'est pas quelconque car elle doit vérifier les relations suivantes, déduites de l'associativité dans G et du fait que $U_e = 1$:

$$\begin{aligned} &\beta(g_1,g_2) + \beta(g_1 g_2, g_3) = \beta(g_1, g_2 g_3) + \beta(g_2, g_3) \\ &\beta(e,e) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

qui impliquent $\beta(e,g) = \beta(g,e) = 0$ (11)

On trouve que X est une forme bilinéaire antisymétrique réelle sur G qui satisfait la relation fondamentale

$$dX(A,B,C) = X([A,B],C) + X([B,C],A) + X([C,A],B) = 0 \quad (12)$$

Inversement, toute forme bilinéaire réelle antisymétrique sur une algèbre de Lie G vérifiant (12) est appelée exposant infinitésimal de l'algèbre ou du groupe de Lie correspondant.

Deux exposants locaux β et β' sont dits équivalents s'il existe une fonction $\gamma(g)$ définie et continue sur un voisinage de l'unité telle que

$$\beta'(g,g') = \beta(g,g') + \Delta_{g,g'}(\gamma) \quad (13)$$

avec

$$\Delta_{g,g'}(\gamma) = \gamma(g) + \gamma(g') - \gamma(gg') \quad (14)$$

De même deux exposants infinitésimaux X et X' sont dits équivalents s'il existe une forme linéaire réelle Σ sur G telle que

$$X'(A,B) = X(A,B) + \Sigma(\{A,B\}) \qquad (15)$$

Ces relations d'équivalence sont telles qu'à deux facteurs (resp. exposants) locaux équivalents, correspondent deux exposants locaux (resp. infinitésimaux) équivalents et réciproquement. Donc, pour déterminer tous les facteurs locaux, il suffit de déterminer tous les exposants infinitésimaux.

Si β est un exposant local du groupe G, il lui correspond un groupe G_β formé par les couples (θ,g) où $\theta \in R$ et $g \in G$, muni de la loi de composition suivante :

$$(\theta_1,g_1)\ (\theta_2,g_2) = (\theta_1 + \theta_2 + \beta(g_1,g_2),\ g_1\ g_2) \qquad (16)$$

Les éléments de la forme (θ,e) forment un sous-groupe T_1 de G_β isomorphe au groupe additif des réels R et appelé "groupe de phase" et l'on a

$$(\theta,g)^{-1}\ (\theta_o,e)\ (\theta,g) = (\theta_o,e) \qquad (17)$$

Le sous-groupe T_1 est donc un sous-groupe invariant central et le groupe facteur G_{β/T_1} est isomorphe à G. G_β apparait alors comme une extension centrale de G par un groupe à un paramètre, correspondant à l'exposant β. Evidemment, deux exposants équivalents conduisent à deux extensions isomorphes et un exposant trivial conduit à l'extension triviale c'est à dire au produit direct $R \times G$.

A partir de cela on peut développer une théorie cohomologique des représentations projectives puisque : un exposant local (resp. infinitésimal) est un 2-cocycle réel de G (resp. de l'algèbre de Lie G); un exposant trivial est un 2-cobord, et l'ensemble des classes d'équivalence des extensions s'identifie au deuxième groupe de cohomologie $H^2(G,R)$.

Finalement, le programme pour la détermination de toutes les représentations projectives unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G est constitué des étapes suivantes :

a/ déterminer le groupe de recouvrement universel $\tilde{G}$ de G

b/ déterminer toutes (les classes d'équivalence) des extensions centrales $\tilde{G}_\beta$ et $\tilde{G}$ par un groupe à un paramètre

c/ déterminer toutes les r.u.i. de $\tilde{G}_\beta$; leur restriction à $\tilde{G}$ sont automatiquement des représentations projectives associées à l'exposant β.

d/ parmi ces dernières considérer uniquement celles pour lesquelles le noyau de l'homomorphisme de recouvrement $\tilde{G} \to G$ est représenté par des facteurs de phase.

II.4. Application au groupe P_2 et définition du groupe $H_4 \Lambda SL(2,C)$

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'appliquer ce qui précède au groupe P_2. Pour ce faire, soit $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$ les deux sous-groupes (connexes et simplement connexes) de $\tilde{P}_2$ engendrés respectivement par $(M^{\alpha\beta}, P^\gamma)$ et $(M^{\alpha\beta}, Q^\gamma)$, on a alors le

Lemme II.4.1.

Tout exposant infinitésimal X de P_2 est équivalent à un exposant infinitésimal Y tel que

$$Y(A,B) = 0 \text{ pour tout couple } (A,B) \in P \text{ ou } P' \qquad (18)$$

Démonstration :

Les deux sous-groupes $\tilde{P}$ et $\tilde{P}'$ sont isomorphes au groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré qui ne possède d'après Bargmann, que des représentations projectives vectorielles ; c'est à

dire pour lesquelles $\omega(g,g') = 1$. (Si l'on considère, non pas $\tilde{P}$, mais P alors $\omega(g,g') = \pm 1$, ambiguité de signe qui ne manifeste pas l'apparition des spins demi-entiers et qui est due au fait que ce groupe est doublement connexe) . Aussi si X est un exposant infinitésimal de $\mathcal{P}_2$, il existe deux formes linéaires réelles Σ_1 et Σ_2 respectivement sur les deux algèbres de Lie $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ telles que :

$$X(M^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}) = \Sigma_1([M^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}]) \tag{19a}$$

$$X(M^{\alpha\beta},P^{\alpha}) = \Sigma_1([M^{\alpha\beta},P^{\alpha}]) \tag{19b}$$

$$X(M^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}) = \Sigma_2([M^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}]) \tag{19c}$$

$$X(M^{\alpha\beta},Q^{\alpha}) = \Sigma_2([M^{\alpha\beta},Q^{\alpha}]) \tag{19d}$$

ce qui donne, à partir des relations de commutations de l'algèbre de Lorentz, et de (19c)

$$\Sigma_1(M^{\beta\delta}) = \Sigma_2(M^{\beta\delta})$$

Considérons alors la forme linéaire réelle Σ définie sur $\mathcal{P}_2$ par

$$\begin{aligned} \Sigma(M^{\beta\delta}) &= \Sigma_1(M^{\beta\delta}) = \Sigma_2(M^{\beta\delta}) \\ \Sigma(P^{\alpha}) &= \Sigma_1(P^{\alpha}) \\ \Sigma(Q^{\alpha}) &= \Sigma_2(Q^{\alpha}) \end{aligned} \tag{20}$$

et l'application bilinéaire antisymétrique réelle Y définie sur $\mathcal{P}_2$ par

$$\begin{aligned} Y(P^{\alpha},Q^{\beta}) &= X(P^{\alpha},Q^{\beta}) \\ Y &\equiv 0 \quad \text{pour tous les autres couples} \end{aligned} \tag{21}$$

Y vérifie la relation (12), en effet :

a/ $dY(A,B,C) = 0$ pour tout triplet appartenant ou bien à $\mathcal{P}$ ou bien à $\mathcal{P}'$, puisque les restrictions de Y à ces deux algèbres de Lie sont nulles

b/ $dY(A,B,C) = 0$ pour tout triplet ne faisant intervenir que des P^α et des Q^β , d'après les relations de commutation de P_2 et la bilinéarité de Y.

c/ Il reste donc à vérifier que

$$dY(M^{\alpha\beta},P^\gamma,Q^\delta) = 0$$

on obtient à partir de la relation (2)

$$\begin{aligned} dY(M^{\alpha\beta},P^\gamma,Q^\delta) &= Y(\{M^{\alpha\beta},P^\gamma\},Q^\delta) + Y(\{Q^\delta,M^{\alpha\beta}\},P^\gamma) \\ &= X(\{M^{\alpha\beta},P^\gamma\},Q^\delta) + X(\{Q^\delta,M^{\alpha\beta},P^\gamma) \\ &= dX(M^{\alpha\beta},P^\gamma,Q^\delta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que Y est bien un exposant infinitésimal de P_2

Les relations (2), (19), (20) et (21) permettent d'écrire :

$$X(A,B) - Y(A,B) = \Sigma(\{A,B\}) \qquad \forall A,B \in P_2$$

donc les deux exposants infinitésimaux X et Y sont équivalents.

Lemme II.4.2.

Pour qu'une forme bilinéaire antisymétrique réelle Y définie sur P_2 et vérifiant (18) soit un exposant infinitésimal, il faut et il suffit que l'on ait

$$Y(P^\alpha,Q^\beta) = g^{\alpha\beta}\, r \qquad (22)$$

où r est un nombre réel.

Démonstration :

Soit Y un tel exposant infinitésimal ; il vérifie alors la relation (12), ce qui implique en particulier

a/ $dY(M^{\alpha\beta},P^\alpha,Q^\delta) = Y(\{M^{\alpha\beta},P^\alpha\},Q^\delta) + Y(\{Q^\delta,M^{\alpha\beta}\},P^\alpha) = 0$

si l'on prend $\delta \neq \alpha$ et $\delta \neq \beta$, il vient

$$Y(\left(M^{\alpha\beta},P^{\alpha}\right),Q^{\delta}) = - g^{\alpha\alpha}\, Y(P^{\beta},Q^{\delta}) = 0$$

d'où

$$Y(P^{\beta},Q^{\delta}) = 0 \qquad \text{pour } \beta \neq \delta$$

b/ $$dY(M^{\alpha\beta},P^{\beta},Q^{\alpha}) = Y(\left(M^{\alpha\beta},P^{\beta}\right),Q^{\alpha}) + Y(\left(Q^{\alpha},M^{\alpha\beta}\right),P^{\beta}) = 0$$

d'où

$$g^{\beta\beta}\, Y(P^{\alpha},Q^{\alpha}) + g^{\alpha\alpha}\, Y(Q^{\beta},P^{\beta}) = 0$$

si $\beta = 0$, $\alpha = i = 1,2,3$ on obtient

$$Y(P^{i},Q^{i}) + Y(P^{o},Q^{o}) = 0$$

ce qui donne

$$Y(P^{o},Q^{o}) = - Y(P^{i},Q^{i}) = r$$

où r est un nombre réel.

Inversement soit Y une forme bilinéaire antisymétrique réelle vérifiant les relations (18) et (22). Pour démontrer que c'est un exposant infinitésimal, il suffit de prouver qu'elle vérifie (12). Il ressort du raisonnement employé dans le démonstration du lemme II.4.1. qu'il suffit de démontrer que

$$dY(M^{\alpha\beta},P^{\gamma},Q^{\delta}) = 0 \qquad (23)$$

c'est à dire que

$$dY(M^{\alpha\beta},P^{\gamma},Q^{\delta}) = Y(\left(M^{\alpha\beta},P^{\gamma}\right),Q^{\delta}) + Y(\left(Q^{\delta},M^{\alpha\beta}\right),P^{\gamma}) = 0 \qquad (24)$$

A partir des relations de commutation de P_2, on peut obtenir

$$dY(M^{\alpha\beta},P^{\gamma},Q^{\delta}) = Y(g^{\beta\gamma}P^{\alpha} - g^{\alpha\gamma}\, P^{\beta},Q^{\delta}) + Y(g^{\alpha\delta}\, Q^{\beta} - g^{\beta\delta}\, Q^{\alpha},P^{\gamma})$$

$$= g^{\beta\gamma}\, Y(P^{\alpha},Q^{\delta}) - g^{\alpha\gamma}\, Y(P^{\beta},Q^{\delta}) + g^{\alpha\delta}\, Y(Q^{\beta},P^{\gamma}) - g^{\beta\delta}\, Y(Q^{\alpha},P^{\gamma})$$

L'antisymétrie de Y et la relation (22) permettent d'écrire

$$dY(M^{\alpha\beta},P^{\gamma},Q^{\delta}) = (g^{\beta\gamma}\, g^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}\, g^{\gamma\beta} + g^{\beta\delta}\, g^{\gamma\alpha})\, r$$

$$= 0$$

Lemme II.4.3.

Si {Y} est une classe d'équivalence d'exposants infinitésimaux de P_2, elle admet un représentant Y et un seul vérifiant les relations (18) et (22).

Démonstration :

L'existence de Y découle des lemmes II.4.1 et II.4.2..

Supposons qu'il existe un autre représentant Y', associé au nombre réel r' et vérifiant la propriété, on a alors :

$$Y(P^o,Q^o) - Y'(P^o,Q^o) = r - r' \qquad (25)$$

comme Y et Y' sont supposés équivalents, il existe une forme réelle Σ sur P_2 telle que l'on a

$$Y(P^o,Q^o) - Y'(P^o,Q^o) = \Sigma((P^o,Q^o))$$

or $(P^o,Q^o) = 0$ donc $r = r'$

en particulier un tel Y est équivalent à zéro si et seulement si $r = 0$.

Théorème II.4.1.

La dimension de l'espace vectoriel des classes d'équivalence des exposants infinitésimaux de P_2 est égale à l'unité.

Démonstration :

Soit $\{Y_o\}$ une classe d'équivalence non nulle d'exposants infinitésimaux. D'après le lemme II.4.3., elle admet un représentant et un seul Y_o défini par r_o, également différent de zéro. Si {Y} est une classe d'équivalence définie par r, on peut écrire, d'après le lemme II.4.2.

$$\{Y\} = \frac{r}{r_o} \{Y_o\}$$

cette décomposition étant unique.

Corollaire II.4.1.

La dimension de l'espace vectoriel des classes d'équivalence des exposants locaux du groupe $\tilde{P}_2$ est égale à l'unité.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate du théorème II.4.1 et du théorème 4.2. de Bargmann [3].

Aussi, il nous suffit de déterminer un exposant local non trivial pour les connaître tous, ce qui est donné par le

Théorème II.4.2.

L'application $\beta_o : \tilde{P}_2 \times \tilde{P}_2 \to R$ définie par

$$\beta_o(g_1,g_2) = \underline{a}_1 \cdot \Lambda(A_1)\, \underline{b}_2 \qquad (26)$$

(où $g_i = (\underline{a}_i, \underline{b}_i, A_i)$) est un exposant local non trivial de $\tilde{P}_2$.

Démonstration :

$$\beta_o(g_1,g_2)+\beta_o(g_1 g_2,g_3) = \underline{a}_1 \cdot \Lambda(A_1)\underline{b}_2 + (\underline{a}_1+\Lambda(A_1)\underline{a}_2)\cdot\Lambda(A_1)\Lambda(A_2)\ \underline{b}_3$$

$$\beta_o(g_2,g_3)+\beta_o(g_1,g_2\ g_3) = \underline{a}_2 \cdot \Lambda(A_2)\underline{b}_3 + \underline{a}_1 \cdot \Lambda(A_1)(\underline{b}_2+\Lambda(A_2)\underline{b}_3\ )$$

$\beta_o(e,e) = 0$

montrent que β_o est un exposant local.

Soient les deux éléments des $\tilde{P}_2$ suivants

$$g_1 = (\underline{a}_1, 0, 1)$$

$$g_2 = (0, \underline{a}_2, 1)$$

on obtient

$$g_1\, g_2 = g_2\, g_1 = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, 1)$$

$$\beta_o(g_1,g_2) = \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2$$

$$\beta_o(g_2,g_1) = 0$$

Donc, si $\underline{a}_1$ et $\underline{b}_2$ ne sont pas orthogonaux

$$\beta_o(g_1,g_2) \neq \beta_o(g_2,g_1) \text{ bien que } g_1g_2 = g_2g_1 \qquad (27)$$

ce qui montre que β_o n'est pas équivalent à zéro, car sinon, il existerait une fonction $\gamma(g)$ définie et continue sur un voisinage de l'unité telle que

$$\beta_o(g_1,g_2) = \gamma(g_1) + \gamma(g_2) - \gamma(g_1g_2)$$

ce qui contredit (27).

En conséquence, tout exposant va s'écrire simplement

$$\beta(g_1,g_2) = r\,\beta_o(g_1,g_2) = r\,\underline{a}_1.\Lambda(A_1)b_2 \qquad (28)$$

où r est une constante réelle positive, négative ou nulle et les représentations projectives unitaires irréductibles de $\tilde{P}_2$ sont limitées à une famille caractérisée par les facteurs locaux :

$$\omega(\underline{a}_1,\underline{b}_1,A_1\ ;\ \underline{a}_2,\underline{b}_2,A_2) = e^{i\underline{a}_1.\Lambda(A_1)\underline{b}_2} \qquad (29)$$

si r = 0, on obtient les représentations vraies de $\tilde{P}_2$; ses représentations projectives associées à la valeur r du paramètre peuvent être considérées comme les représentations (vectorielles, unitaires irréductibles) d'un groupe $\tilde{P}_{2,r}$ qui est une extension centrale par un groupe abélien à un paramètre. L'élément générique h de $\tilde{P}_{2,r}$ sera représenté par le couple

$$h = (\theta,g) \qquad \text{où } \theta \in R \text{ et } g \in \tilde{P}_2$$

et la loi de multiplication est

$$h_1h_2 = (\theta_1,g_1)(\theta_2,g_2) = (\theta_1 + \theta_2 + r\,\underline{a}_1 \cdot \Lambda(A_1)\underline{b}_2, g_1g_2) \qquad (30)$$

ou, plus explicitement

$$(\theta_1,\underline{a}_1,\underline{b}_1,A_1)(\theta_2,\underline{a}_2,\underline{b}_2,A_2)=(\theta_1+\theta_2+r\underline{a}_1.\Lambda(A_1)\underline{b}_2,\underline{a}_1+\Lambda(A_1)\underline{a}_2,\underline{b}_1+\Lambda(A_1)\underline{b}_2,A_1A_2) \qquad (31)$$

L'élément unité est (0,0,0,1) et l'inverse de $(\theta,\underline{a},\underline{b},A)$ est

$$(\theta,\underline{a},\underline{b},A)^{-1} = (-\theta + r\,\underline{a}.\underline{b},\ -\Lambda(A)^{-1}\underline{a},\ -\Lambda(A)^{-1}\underline{b},\ A^{-1}) \qquad (32)$$

Toutes les extensions $\tilde{P}_{2,r}$ $(r \neq 0)$ sont isomorphes : si (θ',g') est un élément de $\tilde{P}_{2,r}$ et (θ,g) un élément de $\tilde{P}_{2,1}$, l'isomorphisme s'écrit simplement

$$\theta' = r\,\theta$$

$$g' = g$$

La relation entre les représentations projectives de "type r" de $\tilde{P}_2$ et les vraies représentations de $\tilde{P}_{2,r}$ est donnée par

$$U(\theta,\underline{a},\underline{b},A) = e^{i\theta}\,U(\underline{a},\underline{b},A) \qquad (33)$$

Etant donné que P_2 est doublement connexe, le passage de $\tilde{P}_2$ à ce dernier se fait (à l'instar des groupes de Galilée et de Poincaré) en ajoutant simplement une ambiguité de signe.

On voit ainsi que les représentations projectives du groupe P_2 ont exactement la même structure que celles du groupe de Galilée G [10/ 11/] puisque, pour ce dernier, tout facteur local s'écrit

$$\omega(b_1,\vec{a}_1,\vec{v}_1,B_1;b_2,\vec{a}_2,\vec{v}_2,B_2) = e^{im\{\vec{v}_1.R(B_1)\vec{a}_2+(1/2)v_1^2\,b_2\}} \qquad (34)$$

où le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$. La loi de multiplication de $\tilde{G}_m$ (extension centrale de $\tilde{G}$ caractérisée par le paramètre m) est

$$(\theta_1,b_1,\vec{a}_1,\vec{v}_1,B_1)\ (\theta_2,b_2,\vec{a}_2,\vec{v}_2,B_2) =$$

$$(\theta_1+\theta_2+im\left(\vec{v}_1.R(B_1)\vec{a}_2+\frac{1}{2}\,v_1^2\,b_2\right),\ b_1+b_2, \qquad (35)$$

$$\vec{a}_1+R(B_1)\vec{a}_2 + b_2\vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_1+R(B_1)\vec{v}_2,\ B_1B_2)$$

Aussi $\tilde{G}_m$ a les structures suivantes

$$\tilde{G}_m = T_5 \wedge (A \wedge SU(2)) = T_5 \wedge \Delta \qquad (36)$$

où T_5 est le sous-groupe abélien normal à cinq dimensions engendré par $\{(\theta,b,\vec{a},0,1)\}$, A le sous-groupe des transformations pures de Galilée (qui est sous-groupe invariant maximal de $\tilde{G}_m/T_5$), Δ le sous-groupe engendré par les transformations homogènes de Galilée $\{(0,0,0,\vec{v},B)\}$ et l'on a évidemment $\tilde{G}_m/T_5/A = SU(2)$.

Le groupe de Poincaré (dont toutes les représentations projectives sont vectorielles) admet T_4 comme sous-groupe abélien invariant maximal, et le groupe facteur $\tilde{P}/T_4$ est le groupe simple SL(2,C). Pour $\tilde{P}_2$, le groupe abélien invariant maximal est le groupe $T_4 \times T'_4$, le groupe facteur est également SL(2,C). Le groupe à 15-paramètres $\tilde{P}_{2,r}$ que nous avons à étudier a une structure différente de celle de $\tilde{P}_2$: le sous-groupe $T_4 \times T_1$ (resp. $T'_4 \times T_1$) est un sous-groupe abélien invariant maximal à 5-paramètres ; le groupe facteur $\tilde{P}_{2,r}/T_4 \times T_1$ (resp. $P_{2,r}/T'_4 \times T_1$) admet à son tour un sous-groupe abélien invariant maximal T'_4 (resp. T_4) ; finalement le groupe facteur $\tilde{P}_{2,r}/(T_4 \times T_1)/T'_4$ (resp. $\tilde{P}_{2,r}/(T'_4 \times T_1)/T_4$ est le sous-groupe simple SL(2,C). On peut donc écrire

$$\tilde{P}_{2,r} = (T_4 \times T_1) \wedge (T'_4 \wedge SL(2,C)) \qquad (37\text{-a})$$

ou bien

$$\tilde{P}_{2,r} = (T'_4 \times T_1) \wedge (T_4 \wedge SL(2,C)) \qquad (37\text{-b})$$

Proposition II.4.1.

L'algèbre de Lie $P_{2,r}$ se déduit de P_2 en lui joignant le générateur (central) C du groupe de phase et en substituant $(P^\alpha,Q^\beta) = g^{\alpha\beta}\, r\, C$ à $(P^\alpha,Q^\beta) = 0$.

Démonstration

En effet $P_{2,r}$ étant une extension centrale de P_2, le générateur C va appartenir au centre de $P_{2,r}$. De plus, puisque

$$\beta\big((\underline{a},0,1),(0,\underline{b},1)\big)-\beta\big((0,\underline{b},1),(\underline{a},0,1)\big) = r\, g_{\alpha\beta}\, Q^{\alpha}\, b^{\beta} \qquad (38)$$

P et Q ne commutent plus entre eux, plus précisément cette dernière relation entraîne :

$$\big(P^{\alpha},Q^{\beta}\big) = g^{\alpha\beta}\, r\, C \qquad (39)$$

qui est une généralisation des relations de Heisenberg habituelles, ces dernières pouvant se déduire des représentations projectives (non vectorielles) du groupe de Galilée. Cependant une différence essentielle existe dans l'interprétation du coefficient de proportionnalité qui définit l'extension centrale (non triviale) : pour le groupe de Galilée m apparait comme une règle de super sélection [12/] ; dans chaque sous-espace cohérent opère une extension associée à une valeur bien déterminée de m qui est alors interprété comme étant la masse physique. Deux remarques s'imposent à ce stade .-La masse quantique non relativiste est toujours un scalaire qui caractérise le groupe et non pas une r.u.i. du groupe, ce n'est pas un invariant. - $\tilde{G}_m$ et $\tilde{G}_{m'}$, $(m \neq m')$ bien que mathématiquement isomorphes, ne sont pas physiquement isomorphes puisque chacun est associé à une masse bien déterminée. Pour ce qui nous concerne, dans le cadre du modèle P_2, nous interpréterons le générateur r C comme représentant simplement les unités physiques ; il est à remarquer que seules les représentations projectives non vectorielles sont compatibles avec les relations de Heisenberg généralisées (39).

Soit H_4 l'algèbre de Lie de Heisenberg de degré neuf, c'est à dire l'algèbre de Lie engendrée par les relations (39).

Corollaire II.4.2.

$P_{2,r}$ est isomorphe à la somme semi-directe $H_4 \circledS SL(2,C)$, $SL(2,C)$ agissant sur H_4 par la représentation $D(1/2,1/2) \oplus D(1/2,1/2) \oplus 1$.

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la structure de P_2 , de la proposition précédente et du fait que la différentielle de la représentation triviale d'un groupe est la représentation nulle.

Dans la suite, on posera r C = D.

II.5. Sur une nouvelle définition du spin relativiste

Les observables d'une particule libre, relativiste ou galiléenne, sont habituellement choisies parmi les représentants, dans une représentation donnée, d'éléments de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie considérée, de son algèbre enveloppante, ou bien si ce n'est pas le cas, elles sont construites à partir de tels éléments. Généralement, les observables ne sont pas définies indépendemment de la représentation, mais sont, dans tous les cas, représentées par des opérateurs définis sur le domaine de Garding ou un autre domaine qui possède, vis à vis de l'ensemble des observables, les mêmes propriétés que ce dernier. En outre, la mécanique quantique exige que ces observables soient représentées par des opérateurs self-adjoints. Or l'on sait qu'il existe des opérateurs symétriques qui n'ont aucune extension self-adjointe, il suffit pour cela que les indices de défaut soient différents. Il est donc nécessaire de démon-

trer que l'opérateur symétrique est également essentiellement self-adjoint pour qu'il puisse représenter l'observable physique qui sera identifiée alors à la fermeture self-adjointe de l'opérateur. Il faut en effet [13/] qu'il ait des indices de défaut égaux pour qu'il ait des extensions self-adjointes et des indices de défaut nuls pour qu'on puisse définir, sans ambiguité, l'observable à partir de l'opérateur symétrique.

Le caractère essentiellement self-adjoint de la première catégorie d'observables est immédiat, celui de la seconde catégorie, sans être général, l'est également pour certaines familles d'opérateurs [14/] En ce qui concerne la troisième catégorie d'observables, celle constituée à partir de représentants d'éléments de l'algèbre de Lie enveloppante, le caractère d'opérateur essentiellement self-adjoint n'est pas automatique et il doit être démontré dans chaque cas particulier.

Il ressort de tout cela que ce sont les opérateurs des deux premières catégories qui sont les plus commodes dans les applications physiques, malheureusement,il en existe qui appartiennent à la troisième catégorie.

Dans le formalisme relativiste habituel (basé sur le groupe de Poincaré) l'opérateur position n'est pas image d'éléments de l'algèbre enveloppante. Or, dans notre modèle, la position est image d'éléments de l'algèbre de Lie elle-même, indépendemment de la représentation considérée. Quant au spin relativiste, la situation est plus complexe puisque l'on a plusieurs définitions selon que l'on veut mettre l'accent sur la nécessité d'avoir

a/ des opérateurs de spin covariants par rapport au groupe de Lorentz

ou

b/ des opérateurs de spin vérifiant les relations de commutation habituelles.

et la vérification de l'une de ces deux propriétés exclut automatiquement l'autre.

Dans ce paragraphe, nous allons ajouter, à la collection de définitions du spin relativiste existant dans la littérature, une nouvelle. Pour ce faire, nous allons déterminer une classe de représentation du groupe $H_4 \Lambda SL(2,C)$ pour lesquelles il existe des opérateurs images d'élements de l'algèbre enveloppante qui pourraient être interprétés comme étant le moment angulaire et le spin et qui apparaissent comme une généralisation du cas non relativiste ; l'opérateur de spin ainsi construit vérifiera les mêmes conditions que celui considéré par Berg [15], mais il sera de structure beaucoup plus simple. Cet exemple est construit par analogie avec la mécanique galiléenne dont on va rappeler les principales propriétés [11] qui vont nous servir.

Le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée possède deux éléments algébriquement irréductibles qui sont donnés, par exemple, par

$$\begin{aligned} p^2 &= \vec{P}^2 \\ n^2 &= (\vec{K} \times \vec{P})^2 \end{aligned} \tag{40}$$

où $\vec{P}$ et $\vec{K}$ sont les tri-générateurs de composantes respectivement (P^i) et (K^i) et X désignant le produit vectoriel. Notons que l'élément

$$\sigma = \vec{J} \cdot \vec{P} \tag{41}$$

de l'algèbre enveloppante commute avec P°, $\vec{P}$ et $\vec{J}$ et vérifie

$$(\sigma,\vec{K}) = \vec{K}\times\vec{P} \tag{42}$$

aussi, si n = 0, il appartient au centre.

Quant au centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie G_m (extension centrale de G relative au paramètre m) il est tri-dimensionnel et engendré par

$$\begin{aligned} M &= m\ 1 \\ U &= P^\circ - \frac{1}{2m}\ \vec{P}^2 \\ \vec{S}^2 &= \left(\vec{J} - (1/m)\ (\vec{K}\times\vec{P})\right)^2 \end{aligned} \tag{43}$$

Passons maintenant à l'interprétation physique : M (resp. U,$\vec{S}$) représente la masse (resp. l'énergie interne, le spin). Le moment angulaire orbital est donné par

$$\vec{L} = (1/m)\ (\vec{K}\times\vec{P}) \tag{44}$$

et l'opérateur position, par

$$\vec{Q} = (1/m)\ \vec{K} \tag{45}$$

On voit que, contrairement au cas relativiste, ce sont des éléments de l'algèbre enveloppante. Le moment angulaire total va pouvoir s'écrire :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{46}$$

Par analogie avec le cas non relativiste, considérons les éléments $L^{\alpha\beta}$ et $S^{\alpha\beta}$ de l'algèbre enveloppante $U(H_4 \Theta SL(2,C))$ de l'algèbre de Lie $H_4 \Theta SL(2,C)$ définis par

$$L^{\alpha\beta} = Q^\alpha\ P^\beta - Q^\beta\ P^\alpha \tag{47-a}$$

$$S^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} - L^{\alpha\beta} \tag{47-b}$$

ce qui implique, en particulier

$$M^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta} = Q^\alpha\ P^\beta - Q^\beta\ P^\alpha + S^{\alpha\beta} \tag{47-c}$$

Dans la suite, quand il n'y a aucune confusion à craindre, un élément et son représentant sont désignés par la même lettre.

Posons :

$$S^1 = S^{23} \; ; \; S^2 = S^{31} \; ; \; S^3 = S^{12} \tag{48-a}$$

$$J^1 = M^{23} \; ; \; J^2 = M^{31} \; ; \; J^3 = M^{12} \tag{48-b}$$

Proposition II.5.1.

Les représentations de $H_4 \oplus SL(2,C)$ *pour lesquelles l'opérateur vectoriel* $\vec{S} = (S^1,S^2,S^3)$ *peut être interprété comme étant le spin dans sa formulation trivectorielle, covariant sous les rotations spatiales* $((S^j,J^j) = \varepsilon^{ijk} S^k)$ *et les translations* $((S^i,P^\alpha) = 0)$ *et ayant de bonnes relations de commutation* $((S^i,S^j) = \varepsilon^{ijk} S^k)$ *sont caractérisées par* $D = 1$.

Démonstration :

Déterminons les relations de commutation de la sous-algèbre de $U(H_4 \oplus SL(2,C))$ engendrée par $(M^{\alpha\beta},P^\alpha,Q^\beta,L^{\alpha\beta},S^{\alpha\beta})$:

$$(L^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}) = - g^{\alpha\alpha} L^{\beta\delta} \tag{49-a}$$

$$(L^{\alpha\beta},P^\alpha) = - g^{\alpha\alpha} D P^\beta \tag{49-b}$$

$$(L^{\alpha\beta},Q^\alpha) = - g^{\alpha\alpha} D Q^\beta \tag{49-c}$$

$$(L^{\alpha\beta},L^{\alpha\delta}) = - g^{\alpha\alpha} D L^{\beta\delta} \tag{49-d}$$

$$(S^{\alpha\beta},M^{\alpha\delta}) = - g^{\alpha\alpha} S^{\beta\delta} \tag{49-e}$$

$$(S^{\alpha\beta},P^\alpha) = - g^{\alpha\alpha} (1-D) P^\beta \tag{49-f}$$

$$(S^{\alpha\beta},Q^\alpha) = - g^{\alpha\alpha} (1-D) Q^\beta \tag{49-g}$$

$$(S^{\alpha\beta},S^{\alpha\delta}) = - g^{\alpha\alpha} S^{\beta\delta} + g^{\alpha\alpha} (1-D) L^{\beta\delta} \tag{49-h}$$

$$(S^{\alpha\beta},L^{\alpha\delta}) = - g^{\alpha\alpha} (1-D) L^{\beta\delta} \tag{49-i}$$

Les relations (49-d) et (49-h) montrent que $(L^{\alpha\beta})$ d'une part et $(S^{\alpha\beta})$ d'autre part ne constituent pas de bases de sous-algèbres de $U(H_4 \oplus SL(2,C))$. A partir des relations (49) on obtient :

$$\left(S^i , P^o\right) = 0 \qquad (50\text{-a})$$

$$\left(S^i , P^j\right) = \varepsilon^{ijk} (1-D) P^k \qquad (50\text{-b})$$

$$\left(S^i , J^j\right) = \varepsilon^{ijk} S^k \qquad (50\text{-c})$$

$$\left(S^i , S^j\right) = \varepsilon^{ijk} \left(S^k - (1-D) L^k\right) \qquad (50\text{-d})$$

où l'on a posé : $L^1 = L^{23}$; $L^2 = L^{31}$; $L^3 = L^{12}$

d'où le résultat cherché.

On peut vérifier, par contre, que $\vec{S}$ ne se transforme pas comme les trois composantes spatiales d'un quadrivecteur sous l'effet des transformations de Lorentz pures car :

$$\left(S^i , K^i\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(S^i , K^j\right) \neq 0 \quad \text{si } i \neq j$$

où $K^i = M^{io}$

Or, pour qu'un quadri-opérateur (B^o, B^1, B^2, B^3) se transforme comme un quadri-vecteur sous l'effet de telles transformations, il est nécessaire et suffisant qu'il vérifie :

$$\left(K^\ell , B^m\right) = \delta^{\ell m} B^o \text{ et } \left(K^\ell , B^o\right) = B^\ell \qquad (51)$$

Pour de telles représentations (D = 1) , on a également

$$\left(S^i , Q^j\right) = 0$$

En conséquence, on retrouve toutes les relations souhaitées par Berg [15]. En plus $L^{\alpha\beta}$ apparait, par sa définition et ses relations de commutation, comme étant le tenseur moment angulaire orbital alors que $S^{\alpha\beta}$ joue le rôle du tenseur de Spin.

II.6. Eléments remarquables et centres des algèbres $U(P_2)$ et $U(H_4 \textcircled{s} SL(2,C))$.

Nous allons nous intéresser, dans ce paragraphe, à certains éléments remarquables qui se rapportent à différentes algèbres de Lie. Pour distinguer les différents crochets, on les indexera par l'algèbre correspondante, chaque fois qu'il y a un risque de confusion.

Considérons l'élément de $U(H_4 \textcircled{s} SL(2,C))$

$$P^2 = g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \tag{52}$$

Comme pour le groupe de Poincaré, il va commuter avec les transformations de Lorentz

$$(P^2 , M^{\alpha\beta}) = 0 \tag{53}$$

Par contre, ce n'est plus un invariant de $H_4 \textcircled{s} SL(2,C)$, car l'on a

$$(P_2 , Q^\alpha)_{H_4 \textcircled{s} SL(2,C)} = 2 D P^\alpha \tag{54}$$

soit

$$Q^2 = g^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \tag{55}$$

on a alors

$$(Q^2 , M^{\alpha\beta}) = 0 \tag{56}$$

$$(Q^2 , P^\alpha)_{H_4 \textcircled{s} SL(2,C)} = - 2 D Q^\alpha \tag{57}$$

En outre

$$(P^2, Q^2)_{H_4 \textcircled{s} SL(2,C)} = 4 D(2D + \underline{Q}.\underline{P}) \tag{58}$$

où $\underline{Q}.\underline{P} = g^{\alpha\beta} Q_\alpha P_\beta$

Ces relations nous suggèrent d'interpréter P^2 et Q^2 comme étant respectivement la masse et le temps propre qui, par leur commutation, ne sont pas simultanément mesurables.

Regardons ce que deviennent les deux autres invariants de P et P' quand on les considère comme élément de $U(H_4 \oplus SL(2,C))$.

Pour ce faire, posons

$$W^\alpha = \frac{1}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta\ M_{\gamma\delta} \tag{59-a}$$

$$V^\alpha = \frac{1}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} Q_\beta\ M_{\gamma\delta} \tag{59-b}$$

qui sont les deux pseudo-vecteurs de Pauli-Lubanski des deux groupes de Poincaré. On a alors les relations

$$\begin{aligned}
&(P^\alpha\ ,\ W^\beta) = 0 \\
&P^\alpha\ \ W_\alpha = 0 \\
&(W^\alpha\ ,\ W^\beta) = -\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\ P_\gamma\ W_\delta \\
&(M^{\alpha\beta}\ ,\ W^\gamma) = g^{\beta\gamma}\ W^\alpha - g^{\alpha\gamma}\ W^\beta
\end{aligned} \tag{60}$$

d'une part, et

$$\begin{aligned}
&(Q^\alpha\ ,\ V^\beta) = 0 \\
&Q^\alpha\ V_\alpha = 0 \\
&(V^\alpha\ ,\ V^\beta) = -\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\ Q_\gamma\ V_\delta \\
&(M^{\alpha\beta}\ ,\ V^\gamma) = g^{\beta\gamma}\ V^\alpha - g^{\alpha\gamma}\ V^\beta
\end{aligned} \tag{61}$$

d'autre part.

Dans $U(H_4 \oplus SL(2,C))$, on obtient

$$(W^\alpha, Q^\varepsilon)_{H_4 \oplus SL(2,C)} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\ (P_\beta\ Q_\gamma + (1/2)\ D\ M_{\beta\gamma}) \tag{62}$$

de laquelle on déduit

$$(W^2, Q^\varepsilon)_{H_4 \oplus SL(2,C)} = \varepsilon^{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\ \{\ (W_\alpha, P_\gamma Q_\delta)_+ + (1/2) D (W_\alpha, M_{\gamma\delta})_+ \} \tag{63}$$

où $(A,B)_+ = AB + BA$

On trouve de même

$$(V^{\alpha},P^{\varepsilon})_{H_4 \circledS SL(2,C)} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \quad (Q_{\beta} P_{\gamma} - (1/2)\, D\, M_{\beta\gamma})$$

$$(V^{\alpha},P^{\varepsilon})_{H_4 \circledS SL(2,C)} = \varepsilon^{\alpha\gamma\delta\varepsilon} \{ (V_{\alpha}, Q_{\gamma} P_{\delta})_{+} - (1/2)\, L(V_{\alpha}, M_{\gamma\delta})_{+} \} \qquad (64)$$

Pour avoir les relations correspondantes dans P_2 , il suffit de faire dans les relations précédentes D = 0. Ainsi les relations (53)-(54), d'une part, et (56-57) d'autre part montrent que P_2 et Q^2 sont des invariants de P_2, compte tenu du fait que P^2 commute avec (P^{α}) et Q^2 avec (Q^{α}).

En outre, on peut vérifier que si $\underline{A} = (A^{\alpha})$ et $\underline{B} = (B^{\alpha})$ sont deux quadri-éléments de $U(P_2)$ alors :

a/ si (A^{α}) et (B^{α}) commutent avec (P^{α},Q^{β}) , d'après la relation $(AB,C) = A(B,C) + (A,C)B$, $g^{\alpha\beta} A_{\alpha} B_{\beta}$ commute également avec (P^{α},Q^{β}).

b/ s'ils se transforment comme des quadrivecteurs sous l'effet des transformations de Lorentz, le produit scalaire $g^{\alpha\beta} A_{\alpha} B_{\beta}$ commute avec ces dernières.

Ce qui montre que $\underline{Q}.\underline{P}$ est également un invariant de P_2.

Nous avons à considérer des sous-algèbres abéliennes maximales de l'algèbre enveloppante $U(H_4 \circledS SL(2,C))$ qui, dans une représentation donnée, caractériseront plus ou moins (par leurs valeurs propres) la représentation en question et qui seront interprétées comme étant les algèbres maximales d'observables simultanément mesurables. Pour ce faire, nous devons déterminer également les invariants indépendants de $H_4 \circledS SL(2,C)$.

Si l'on pose

$$T^{\alpha\beta} = D\, M^{\alpha\beta} - L^{\alpha\beta} \qquad (65)$$

où $L^{\alpha\beta}$ est défini par (47-a), on obtient

$$(T^{\alpha\beta}, P^{\gamma}) = 0$$
$$(T^{\alpha\beta}, Q^{\gamma}) = 0 \qquad (66)$$
$$(T^{\alpha\beta}, M^{\sigma\rho}) = - g^{\alpha\sigma} T^{\beta\rho} - g^{\beta\rho} T^{\alpha\sigma} + g^{\alpha\rho} T^{\beta\sigma} + g^{\beta\sigma} T^{\alpha\rho}$$

Les invariants de $H_4 \circledS SL(2,C)$ sont donnés par

$$I_o = D \qquad (67\text{-a})$$
$$I_1 = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} T^{\gamma\delta} T^{\alpha\beta} \qquad (67\text{-b})$$
$$I_2 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\alpha\beta} T^{\gamma\delta} \qquad (67\text{-c})$$

On remarquera que si D est représenté par l'identité, $T^{\alpha\beta}$ se réduit à $S^{\alpha\beta}$ (cf. la relation (47-b) et I_1 et I_2 représentent les invariants du groupe de Lorentz homogène. En plus, à l'encontre du groupe de Galilée où le passage de G à G_m fait croître (d'une unité) le nombre d'invariants (algébriquement) indépendants, les centres de $U(P_2)$ et de $U(H_4 \circledS SL(2,C))$ sont tous les deux tridimensionnels.

II.7. Connexions avec le groupe conforme

Etant donné que $\mathcal{C}$ et $H_4 \circledS SL(2,C)$ ont même dimension, que cette dernière est une inhomogénisation de l'algèbre de Poincaré, le lien le plus naturel qui peut exister entre eux se situe au niveau des contractions.

L'origine de la notion de contraction est essentiellement physique. Introduite par Segal [16] et Inonu-Wigner [17], elle a été généralisée par Saletan [18] selon la forme première proposée par les deux derniers auteurs (voir également [19]). Utilisée fréquemment en physique, elle est restée pratiquement ignorée des mathématiciens. On assiste actuellement à un regain d'intérêt pour cette théorie dû

essentiellement à l'introduction de la notion de déformation [20] (qui lui est postérieure et qui est, grosso-modo, le processus inverse) et à l'application de ces deux concepts au niveau des représentations.

Elle se présente formellement de la façon suivante : soient une algèbre de Lie A et une sous-algèbre B, correspondant respectivement à un groupe de Lie A et un sous-groupe B. On suppose donné sur A une application linéaire régulière φ_ε, dépendant d'un paramètre ε dont la restriction à B est l'opérateur identité. On fait tendre ensuite ε vers une certaine limite qui rend φ_ε singulière, les constantes de structure restant finies. L'algèbre de Lie $A^{(1)}$ ainsi obtenue comme une "limite" de A est dite la contractée de A par rapport à B. Les algèbres A et $A^{(1)}$ ont même dimension. L'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments contractés est un idéal abélien de $A^{(1)}$ et l'on a un isomorphisme entre B et $A^{(1)}/\mathcal{D}$. Le groupe $A^{(1)}$, engendré par $A^{(1)}$ est dit également le contracté de A par rapport à B.

Contractons le groupe conforme par rapport au groupe de Poincaré ; pour ce faire, considérons l'application $\varphi_\varepsilon : C \to C$ définie par

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon(A^\alpha) &= \varepsilon A^\alpha = A'^\alpha \\
\varphi_\varepsilon(D) &= \varepsilon D = D' \\
\varphi_\varepsilon(M^{\alpha\beta}) &= M^{\alpha\beta} \\
\varphi_\varepsilon(P^\alpha) &= P^\alpha
\end{aligned}$$

En plus des relations qui restent inchangées, on obtient :

$$\begin{aligned}
(A'^\alpha, M^{\alpha\beta}) &= g^{\alpha\alpha} A'^\beta \\
(A'^\alpha, P^\beta) &= -2(g^{\alpha\beta} D' + \varepsilon M^{\alpha\beta}) \\
(D', M^{\alpha\beta}) &= 0 \\
(D', P^\alpha) &= -\varepsilon P^\alpha
\end{aligned} \qquad (68)$$

Si l'on fait tendre dans (68) ε vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
(A'^{\alpha}, M^{\alpha\beta}) &= g^{\alpha\alpha} A'^{\beta} \\
(A'^{\alpha}, P^{\beta}) &= -2 g^{\alpha\beta} D' \\
(D', M^{\alpha\beta}) &= 0 \\
(D', P^{\alpha}) &= 0
\end{aligned} \tag{69}$$

qui constituent les relations de commutation de l'algèbre contractée $\mathcal{C}^{(1)}$, compte-tenu des relations inchangées. Et l'on voit que $\mathcal{C}^{(1)}$ est isomorphe à $H_4 \oplus SL(2,C)$, l'isomorphisme étant donné par

$M^{\alpha\beta} \to M^{\alpha\beta}$; $P^{\alpha} \to P^{\alpha}$; $Q^{\alpha} \to (1/2) A'^{\alpha}$; $D \to D'$

L'algèbre de Lie P_2 a été considérée [21] comme étant une sous-algèbre d'une algèbre de Lie A_o, contenant l'algèbre de Lie de Poincaré, dont une représentation locale, partiellement intégrable à cette dernière, fournit un spectre de masse discret.
Les relations de commutation de A_o étant les mêmes que celle de l'algèbre conforme à part les suivantes

$$\begin{aligned}
(P^{\alpha}, D) &= A^{\alpha} \\
(A^{\alpha}, D) &= 0 \\
(P^{\alpha}, A^{\beta}) &= 0
\end{aligned} \tag{70}$$

Nous allons voir que A_o peut également être obtenue par (double) contraction de l'algèbre conforme.

Considérons à cet effet l'application $\psi_\varepsilon : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définie par

$$\begin{aligned}
\psi_\varepsilon(P^{\alpha}) &= \varepsilon(P^{\alpha} - A^{\alpha}) = P'^{\alpha} \\
\psi_\varepsilon(A^{\alpha}) &= \varepsilon(P^{\alpha} + A^{\alpha}) = A'^{\alpha} \\
\psi_\varepsilon(M^{\alpha\beta}) &= M^{\alpha\beta} \\
\psi_\varepsilon(D) &= D
\end{aligned} \tag{71}$$

En plus des relations qui font intervenir $M^{\alpha\beta}$ et D qui restent inchangées, on obtient, en faisant tendre ε vers zéro

$$\begin{aligned}
(P'^{\alpha}, M^{\alpha\beta}) &= g^{\alpha\alpha} P'^{\beta} \\
(P'^{\alpha}, D\ ) &= A'^{\alpha} \\
(A'^{\alpha}, M^{\alpha\beta}) &= g^{\alpha\alpha} A'^{\beta} \\
(A'^{\alpha}, D\ ) &= P'^{\alpha}
\end{aligned} \tag{72}$$

les relations restantes étant nulles . Soit $\mathcal{C}'$ l'algèbre de Lie contractée ; considérons l'application $\psi'_{\varepsilon} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$ définie par

$$\begin{aligned}
\psi'_{\varepsilon}(A'^{\alpha}) &= \varepsilon A'^{\alpha} = A''^{\alpha} \\
\psi'_{\varepsilon}(D) &= \varepsilon D = D'' \\
\psi'_{\varepsilon}(P'^{\alpha}) &= P'^{\alpha} \\
\psi'_{\varepsilon}(M^{\alpha\beta}) &= M^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{73}$$

On trouve alors que l'algèbre contractée vérifie les relations de commutation suivantes

$$\begin{aligned}
(P'^{\alpha}, D''\ ) &= A''^{\alpha} \\
(A''^{\alpha}, D''\ ) &= 0 \\
(P'^{\beta}, A''^{\alpha}) &= 0
\end{aligned} \tag{74}$$

les relations restantes étant les mêmes que celles du groupe conforme ; autrement dit, on retrouve l'algèbre de Lie A_o.

D'après les relations de commutation de l'algèbre de Lie A_o, on voit que celle-ci est une extension inessentielle [22/] non triviale de P_2 pour l'algèbre unidimensionnelle engendrée par D" ; donc sa structure est complètement différente de celle de $H_4 \oplus SL(2,C)$ qui est une extension centrale non triviale de P_2 par une algèbre également unidimensionnelle, la suite exacte étant

$$T_1 \xrightarrow{f} H_4 \oplus SL(2,C) \xrightarrow{g} P_2$$

où f est l'injection canonique f(D) = D et g l'homomorphisme surjectif défini par : $g(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta}$; $g(P^{\alpha}) = P^{\alpha}$; $g(Q^{\alpha}) = Q^{\alpha}$; g(D) = 0. Aussi P_2 a une structure complètement différente de l'algèbre de Poincaré, puisque toutes les extensions centrales de cette dernière par une algèbre abélienne sont triviales [6].

On retrouve, de même, l'algèbre de Lie A_o dans [23] (voir également [24]) où une de ses extensions engendrent un groupe dynamique de la mécanique quantique relativiste. Cependant, ces auteurs ont tendance à ne considérer comme physique que les représentations globales. S'il est vrai, d'après les pionniers de la symétrie physique que sont Wigner et Bargmann, que la symétrie originelle s'exprime au niveau des représentations unitaires des groupes envisagés, il n'en est pas de même (depuis les diverses généralisations introduites ; se reporter au paragraphe III.1 pour une analyse plus argumentée de la question) pour les représentations physiques et les propriétés spectrales des observables , par exemple (étant donné que ces dernières se situent au niveau de l'algèbre ou du corps enveloppant). En conséquence, si l'on considère un groupe de symétrie physique (dans tel ou tel sens), il est nécessaire d'avoir le maximum de renseignements possibles sur les représentations (les plus générales) de son algèbre de Lie. Ce qui fera l'objet du prochain chapitre, pour ce qui concerne $H_4 \Lambda SL(2,C)$.

TROISIEME CHAPITRE : REPRESENTATIONS GLOBALES ET LOCALES DU GROUPE $H_4 \Lambda SL(2,C)$*

III.1. Sur les pourquoi des représentations locales

Si un système physique se révèle posséder une certaine symétrie, que le mot soit pris au sens large ou restreint, la démarche (orthodoxe) admise (dans ses grandes lignes) par la majorité des physiciens, pour en tirer parti, est de supposer d'abord, que celle-ci est décrite via un groupe (prescrit par la nature ou stipulé par le choix d'un modèle) et de connecter ensuite, directement ou de biais, certaines propriétés physiques du système à ses représentations unitaires, irréductibles, (pas nécessairement) fidèles et continues.

En vérité, dans un tel schéma, il y a autant de données choisies par commodité mathématique qu'imposées par la physique.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment des situations physiques particulières procurent des critères qui permettent de moduler telle ou telle contingence de la conduite ci-dessus pour la rendre plus adéquate dans le contexte considéré.

Depuis l'introduction, dans la physique des hautes énergies, des concepts du moment angulaire complexe et des pôles de Regge (cf [2] où l'on trouve une revue sur le sujet), plusieurs tentatives ont été amorcées pour leur procurer une formulation groupe-théorique

---

* Ce chapitre représente le développement de [1]

(au sens le plus large). Il s'agit,entre autres, de généraliser les considérations (bien) établies de la théorie standard du moment angulaire habituel (qui est lié, comme on le sait, à l'invariance par rotation spatiale). Ce qui a conduit essentiellement aux approches suivantes : L'utilisation

a/ des groupes de Lorentz (réels) SO(2,1) [3] et SO(3,1) [4]

b/ du groupe de Poincaré complexe [5], auquel cas le moment angulaire complexe est associé aux représentations du groupe des rotations complexes. Ce dernier, qui est isomorphe au groupe de Lorentz réel, joue le rôle de petit groupe relativement au groupe de Poincaré complexe

c/ de semi-groupes contenus dans SL(2,C) ou SL(2,R) [6]

d/ de représentations locales, principalement du groupe des rotations [3]* et récemment du groupe de Weyl [7].

A la vérité, ces différentes approches sont toutes apparentées à la notion de représentations locales des groupes de Lie, non nécessairement intégrables à des représentations globales du type mentionné au premier alinéa de ce paragraphe. Ce qui entraine inéluctablement le relâchement de l'unitarité en théorie des intéractions fortes et, par extrapolation, de l'interprétation probabiliste consacrée qui peut être suppléée par une certaine interprétation d'intensité. D'ailleurs le fléchissement de l'unitarité (et de l'irréductibilité) est plus que manifeste au niveau des particules instables (dont font partie presque tous les hadrons connus, relativement aux intéractions fortes) et dans

---

* Il convient de noter que l'emploi de représentations locales n'apparait pas de façon transparente dans l'intention des auteurs de [3], alors, qu'en réalité, il s'agit bien de ce concept.

la quantification covariante des champs locaux associés à des particules de masse nulle.

La description des particules instables présente une difficulté conceptuelle due principalement à la brièveté de leur durée de vie et à la carence dela démarche habituelle pour la caractérisation des systèmes élémentaires. En effet, il découle, de l'invariance relativiste et de l'interprétation probabiliste, qu'un système est élémentaire si ses états engendrent une r.u.i. du groupe (connexe et simplement connexe) de Poincaré. Ceci impliquant, en particulier, la complète détermination de la masse et du spin ; ce qui est loin d'être le cas pour de telles particules puisque, d'abord la largeur de la résonnance de la masse n'est pas négligeable et ensuite, leur description (phénoménologique) étant liée aux énergies complexes, il parait plausible de leur attacher un moment angulaire et un spin complexes [8]. Parmi les solutions qui ont été considérées, pour résoudre ce dilemme, il y a celle qui propose une nouvelle définition de l'élémentarité quantique relativiste [9] : un système est dit élémentaire si ses états engendrent une représentation (non nécessairement irréductible) du groupe de Poincaré de multiplicité libre telle que la masse puisse être regardée comme une règle de supersélection (i.e., commute avec toutes ses observables) à spectre continu (à l'opposé des règles du supersélection, quantiques relativistes, habituelles où le spectre est discret, tel la charge électrique par exemple). Une seconde tentative consiste à décrire les propriétés d'invariance des particules instables en termes de représentations d'un semi-groupe [10] [11] (contenu dans le groupe de Poincaré) composé des transformations de Lorentz homogènes et des translations d'espace-

temps associés à des vecteurs de type futur ($\underline{a}.\underline{a} > 0$ et $a_o > 0$). Enfin, une troisième approche établie sur la notion de représentation indécomposable (i.e. réductible et non complètement réductible) a été également avancée [12].

Les premières études qui ont été entreprises en vue de la quantification du potentiel électromagnétique A_α font apparaître l'incompatibilité des deux propriétés suivantes :

a/ Les A_α se transforment comme un quadri-vecteur sous les transformations de Lorentz

$$\Lambda : A_\alpha(\underline{x}) \to A'_\alpha(\underline{x}) = \Lambda^\beta_\alpha A_\beta (\Lambda^{-1} \underline{x})$$

b/ Les A_α vérifient les équations de Maxwell

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{où } F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

qui sont invariantes par des transformations de jauge (de seconde espèce) : $A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \varepsilon(\underline{x})$ où $\varepsilon(\underline{x})$ est une fonction scalaire qui est une solution (arbitraire) de l'équation $\Box \varepsilon(\underline{x}) = 0$, définie sur l'espace de Minkowski (cette propriété assure que la masse au repos du photon est nulle).

Ainsi, dans le formalisme de Bleuler-Gupta [13], qui préserve a/, la propriété b/ ne peut être satisfaite que si l'espace des états du champ est muni d'une métrique indéfinie ; ceci étant une conséquence du fait que les relations de commutation (des opérateurs de création et d'annibilation) ne sont plus égales au δ habituel, mais à une expression non définie positive.

En réalité, de telles incompatibilités sont communes à tous les champs, locaux et covariants, associés à des particules de masse nulle et tiennent leur origine du fait que la représentation du

groupe de Poincaré sur l'espace des états de tels champs est indécomposable. Ce qui implique, en particulier, que les A_α quantifiés ne peuvent être des opérateurs dans un espace de Hilbert (avec une métrique définie positive) s'ils vérifient la propriété a/ [14].

Ceci est d'autant plus transparent dans le cadre de l'axiomatique de la quantification des champs relativistes [15] : l'axiome de covariance nous assure la relation

$$U(\underline{a},\Lambda)\ \Psi(\varphi)\ U(\underline{a},\Lambda)^{-1} = S(\Lambda^{-1})\ \ \Psi(\varphi(\Lambda^{-1}(\underline{x} - \underline{a}))$$

entre le champ Ψ (appliqué à une fonction test φ), la représentation $S(\Lambda)$ du groupe de Lorentz qui définit le caractère (tensoriel, spinoriel,...) du champ et la représentation $U(\underline{a}\ ,\ \Lambda)$ (unitaire, pas nécessairement irréductible) du groupe de Poincaré qui définit ses états.

Si le champ est associé à une particule de masse non nulle, la restriction de $S(\Lambda)$ sur le petit groupe coïncide avec la représentation induite de la restriction de $U(\underline{a},\Lambda)$ sur les états monoparticulaires. Pour qu'une telle connexion survive pour des champs associés à des particules de masse nulle, il est nécessaire d'envisager des représentations non unitaires du groupe de Poincaré [16].

Quant au concept de représentation même, et principalement sa relation avec la covariance des équations physiques, il est apparu ces dernières années, une tendance présentant une vague analogie avec le contexte conforme, qui consiste à englober des réalisations non linéaires de certains groupes de symétrie pour exprimer cette "covariance" [17]. Ceci est le cas, par exemple, d'un groupe de symétrie de type chiralité ($SU(2) \times SU(2)$ ou $SU(3) \times SU(3)$) tel que la densité

Lagrangienne présente une partie principale invariante et une partie supplémentaire (traduisant une symétrie brisée) ayant une certaine loi de transformation non triviale. En outre, dans un tel schéma, la réalisation non linéaire du groupe considéré est telle que sa restriction à un de ses sous-groupes (qui traduirait une symétrie exacte) en est une représentation (au sens classique du terme).

Pour ce qui est de la fidélité des représentations, elle est (en général, naïvement) stipulée afin qu'à deux entités physiques distinctes correspondent deux opérateurs distincts. Cependant, elle est violée régulièrement, et souvent pour cause de l'impossibilité de la préserver, comme le montre l'exemple simple suivant : on sait que les représentations unitaires irréductibles du groupe des translations T_n, d'un espace n-dimensionnel E, sont caractérisées par un vecteur $\underline{k} \in E$ ($\underline{a} \in T_n \rightarrow \exp.i(\underline{k}.\underline{a})$) ; or de telles représentations ne sont pas fidèles puisque $\exp.i\,(\underline{k}.\underline{a})$ est périodique et de période 2π (ou bien simplement par ce que le produit scalaire $\underline{k}.\underline{a}$ peut prendre la même valeur pour différents vecteurs $\underline{a}$); il en est donc de même pour les représentations usuelles des groupes de Galilée et de Poincaré. Par contre les représentations régulières d'un groupe localement compact sont toujours fidèles [18].

A la vérité, ce désagrément mathématique n'entraîne pas nécessairement d'inconvénients dans l'interprétation physique ; qui mieux est, dans bien des cas il est nécessaire. Tout d'abord, si l'on part d'une représentation non fidèle d'un groupe donné, on peut en déduire une représentation fidèle d'un groupe (qui lui est homomorphe, s'il ne lui est pas localement isomorphe) en le substituant à son quotient par le noyau de la représentation de départ (e.g. les représentations

de spin entier de SU(2) conduisent, de cette façon, aux représentations (vectorielles) de $SU(2)/Z_2 = SO(3)$); ensuite, comme on l'a déjà signalé, les observables se situant au niveau des algèbres de Lie, pour qu'elles soient représentées fidèlement, il suffit que la fidélité soit vérifiée par les différenciées des représentations globales ; ces dernières pouvant même être multivaluées (e.g. représentations locales de $SO(3)$ de spins demi-entiers qui s'intègrent en des représentations globales bivaluées de SO(3)).

La continuité des représentations est une simplification mathématique qui peut être assortie (éventuellement) à une justification physique, étant donné que les fonctions physiques sont, en général, soit des fonctions continues des observables, soit des fonctions limites de telles fonctions (cas où au lieu de faire des mesures directes, on procède par mesures successives ou bien l'on imagine un processus par itération). Si l'on veut obtenir des représentations unitaires non continues mais mesurables, on doit considérer (et c'est une situation physique ; cf [19], par exemple, dans le cadre d'un modèle ferromagnétique, à un nombre infini de degrés de liberté, dont l'hamiltonien, bien qu'invariant sous la représentation globale d'un groupe de symétrie, ne commute pas avec la représentation locale associée) des espaces de Hilbert non séparables. Pour élucider ce résultat, rappelons les définitions suivantes [18] [20] :

Soient G un groupe localement compact et $g \to V_g$ une représentation de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont le produit scalaire est noté $\langle | \rangle$. La représentation est dite

a/ faiblement continue si l'application $g \to \langle V_g\, x | y \rangle$ est continue pour tout couple $(x,y) \in \mathcal{H}$

b/ fortement continue si l'application $g \to V_g\, x$ est continue pour tout $x \in \mathcal{H}$

c/ faiblement μ -mesurable si l'application $g \to \langle V_g\, x | y \rangle$ est μ-mesurable pour tout $(x,y) \in \mathcal{H}$; μ étant la mesure de Haar de G

d/ "fortement" μ-mesurable si l'application $g \to V_g\, x$ est μ-mesurable (i.e. l'image réciproque de tout ouvert $\mathcal{H}$ est μ-mesurable)

La propriété ci-dessus mentionnée découle alors du résultat fondamental suivant [18/ 20/] : Soit G un groupe localement compact et U une représentation de G par des opérateurs unitaires dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°/ U est faiblement continue

2°/ U est fortement continue

3°/ U est faiblement μ-mesurable

4°/ U est fortement μ-mesurable

Nous terminons ce passage sur la continuité des représentations en mentionnant un exemple simple de représentation non continue du groupe SO(3) : on sait que dans la représentation de base de SO(3) (de poids l'unité), les matrices représentant les rotations autour des axes des coordonnées s'écrivent simplement en fonction du sinus et du cosinus de l'angle θ de la rotation considérée. Si l'on substitue, dans ces matrices, $\cos.f(\theta)$ et $\sin.f(\theta)$ à $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (respectivement), où $f(\theta)$ est une fonction additive non continue, on obtient des représentations non continues du groupe SO(3) desquelles on peut déduire des représentations non continues de groupes le contenant.

Si l'on veut que le représentant de l'élément $g_{\alpha\beta}\ Q^{\alpha}\ Q^{\beta}$ (qui appartient à $U(H_4 \oplus SL(2,C))$ introduit dans le chapitre précédent (ou bien simplement le carré de la masse $g_{\alpha\beta}\ P^{\alpha}\ P^{\beta}$) ait un spectre discret, on sait, d'après le théorème de O'Raifeartaigh-Jost-Segal, précédemment mentionné, que les représentations globales sont automatiquement exclues. Toutes les hypothèses de ce théorème étant nécessaires, pour résoudre la difficulté, on peut soit considérer des groupes de Lie ayant un nobmre infini de paramètres (et c'est une circonstance physique, cf. 21/ et 22/ par exemple) notamment des groupes de Lie banachiques (i.e. localement homéomorphes à un espace vectoriel normé de dimension infinie, éventuellement complet), soit alors (ce qui constitue la prescription que nous suivrons, de par la nature de nos données) considérer des représentations locales non intégrables à des représentations du groupe tout entier (mais qui pourraient être (partiellement) intégrables à l'un de ses sous-groupes, possibilité qui doit être gérée par l'interprétation que nous voulons en tirer). D'ailleurs, un tel programme n'est (certainement) pas spécifique à la classe des éléments ci-dessus envisagés mais peut s'imposer, naturellement, chaque fois que l'on désire quantifier une observable ou rendre discret le spectre du représentant d'un élément de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie donnée. En outre, l'impact de la théorie de Yang et Mills 23/ et sa généralisation 24/ par Sakuraï et Utiyama (où l'invariance de jauge occupe une position fondamentale) en théorie des champs suggère de développer (rigoureusement) ses aspects mathématiques ; or, il est plausible que dans une telle entreprise il soit nécessaire de considérer des algèbres ou des groupes de Lie de degré infini et de donner une signification à leur approxi-

mation par des structures de même type, mais de degré fini. La solution de tels problèmes est loin d'être triviale, d'autant plus que peu de résultats sont connus dans ce domaine.

Nous allons expliquer, par un exemple transparent [25], comment la physique peut dicter, dans certaines occurences particulières, telle structure mathématique plutôt qu'une autre.

En mécanique quantique élémentaire, l'hamiltonien d'un électron libre unidimensionnel est $H = p^2/2m$. L'algèbre des "observables" de ce système est engendré par q et p. H, qui a un spectre purement continu, est représentable par un opérateur self-adjoint dans un espace de Hilbert que l'on peut prendre $L^2(-\infty,+\infty)$. Si l'on suppose maintenant que l'électron n'est plus libre, mais se trouve dans un puits de potentiel infini entre a et b, on peut écrire $H = (p^2/2m)+V_o$ et prendre la limite quand V_o tend vers l'infini entre a et b. De cette façon, nous obtenons les états liés qui sont définis par un spectre discret proportionnel à n^2 (n étant un entier). Cependant, on peut présenter le problème autrement : au lieu de traiter l'hamiltonien $(p^2/2m) + V_o$ et de faire tendre V_o vers l'infini entre a et b, nous pouvons remarquer que la physique oblige l'électron de rester entre a et b, puisque en dehors, où le potentiel est nul, $\varphi = 0$. Il parait alors plus naturel d'utiliser l'hamiltonien initial $p^2/2m$, mais en "coupant" l'espace de la variable, autrement dit de représenter cet hamiltonien d'une manière auto-adjointe (avec un choix convenable de conditions aux limites) dans l'espace de Hilbert $L^2(a,b)$, et cette représentation nous donne les niveaux n^2. Aussi, quand nous traitons un tel système en intéraction, nous ne sommes aucunement obligés d'utiliser un groupe et l'espace $L^2(-\infty,+\infty)$; au contraire, ce

problème dynamique suggère d'utiliser une représentation locale d'une algèbre de Lie, qui est celle des relations de commutation, qui n'est pas nécessairement intégrable à une représentation globale du groupe de Lie correspondant.

La méthode de calcul des fonctions propres du carré du moment cinétique (L_x, L_y, L_z), en mécanique quantique conventionnelle, consiste à exprimer $\vec{L}^2$ en coordonnées sphériques, ce qui donne (à un facteur près) le terme angulaire de l'opérateur de Laplace, et à diagonaliser simultanément, $\vec{L}^2$ et L_z. Ce qui conduit à une équation aux dérivées partielles de type hypergéométrique dont la résolution mène aux harmoniques sphériques, en prenant en considération les hypothèses de finitude, d'univocité et de continuité sur la sphère unité qui stipulent, en particulier, que les valeurs propres de $\vec{L}^2$ sont $\ell(\ell+1)$, où ℓ est un entier positif. Nonobstant, même si l'on relâche ces hypothèses, l'équation aux dérivées partielles précitée admet toujours des solutions [26], et ceci pour toute valeur complexe du paramètre ℓ (résultat connu bien avant l'introduction du moment angulaire complexe et des représentations locales), qui engendrent des représentations locales de $SO(3)$ qui ne sont, en général, pas nécessairement intégrables aux représentations conventionnelles.

Il apparaît donc qu'une méthode pour déterminer les représentations les plus générales (non unitaires, non bornées, indécomposables,...) des groupes de Lie est d'étudier les représentations locales des algèbres de Lie et d'élucider les problèmes de leur intégrabilité; la théorie des fonctions spéciales pouvant concourir à leur réalisation ; qui mieux est, ceci fournirait un formalisme unifiant les équations différentielles et les fonctions spéciales et faciliterait

la classification du chaos de formules où baignent ces dernières. Ceci représente, en quelque sorte, la continuation de l'œuvre d'E. Cartan qui, le premier, découvrit [27] le lien existant entre les fonctions spéciales et les représentations des groupes.

Il est significatif que seuls quelques physiciens-mathématiciens se sont attaqués (au sens rigoureux du terme) à cette entreprise dont l'analyse ci-dessus atteste l'importance dans le développement futur de la physique. Ceci est (certainement) dû aux problèmes difficiles qu'elle soulève (cf [28], par exemple, où il est explicité les difficultés qui se présentent dans la recherche d'un critère d'intégrabilité, et ce même pour des représentations d'algèbres de Lie compactes en espaces de Hilbert par des opérateurs essentiellement anti-adjoints sur un domaine invariant commun engendrant des groupes à un paramètre compacts).

La dernière (et non la moindre) justification de l'emploi des représentations locales en physique, que nous mentionnons dans cette analyse, est fondée sur le fait que si la symétrie "se différencie" (naturellement) localement, la dynamique, elle, ne s'intègre pas (nécessairement) globalement : En effet, l'utilisation directe du théorème de Noether conduit (par différenciation) à des observables vérifiant des lois de conservation ; inversement, si l'on part d'une algèbre d'observables, chacune d'elle peut engendrer un groupe à un paramètre, mais la physique n'exige nullement qu'il y ait intégrabilité globale. Or, dans une telle conjoncture, c'est la dynamique qui doit primer.

En ce qui nous concerne (dans le cadre de la caractérisation des représentations locales de l'algèbre de Lie $H_4 \oplus SL(2,C)$), à défaut

de méthode générale pour mener cette entreprise à son achèvement (ce même pour les algèbres de lie les plus triviales possibles), nous allons nous préoccuper de celles des représentations locales qui soient les plus "voisines" des différenciées des représentations globales et qui offrent un intérêt physique potentiel. Notre programme d'investigation se ramène aux trois points suivants :

1°/ Déterminer toutes les représentations globales unitaires irréductibles du groupe $H_4 \wedge SL(2,C)$.

2°/ Déterminer les représentations locales algébriques irréductibles de $H_4 \wedge SL(2,C)$ à partir de celles de H_4 et des représentations locales algébriques irréductibles de $SL(2,C)$ (que nous construirons).

3°/ Déduire des représentations locales topologiques des représentations du 1°/, soit en tronquant les domaines de variation des variables, soit alors en adaptant les résultats algébriques de [29] (en l'absence d'une théorie topologique des représentations induites des algèbres de Lie qui reste à faire), et du 2°/ , en les réalisant dans des espaces fonctionnels convenablement complétés (en tel cas, les fonctions spéciales, à l'instar de l'exemple ci-dessus, seraient d'un grand secours).

Les deux premiers points sont résolus dans ce chapitre, et nous espérons résoudre le troisième, du moins partiellement, ultérieurement.

III.2. Représentations globales unitaires irréductibles de $H_4 \Lambda SL(2,C)$

Nous avons vu au paragraphe II.4. que le groupe $H_4 \Lambda SL(2,C)$ (qui sera noté, désormais, G) admet la décomposition

$G = H \Lambda K$ où H est le groupe abélien à cinq paramètres $T_1 \times T_4$, et K le groupe $T'_4 \Lambda SL(2,C)$, isomorphe au groupe de recouvrement (1) universel du groupe de Poincaré.

Il apparait donc que la méthode la plus naturelle pour déterminer toutes ses r.u.i. se trouve être celle des représentations induites [30], à condition qu'il vérifie les propriétés requises.

Pour ce faire, soit $h = (\theta, \underline{a}, 0, 1)$ (resp. $\hat{h} = (\omega, \underline{p}, 0, 1)$ un élément de H (resp. de $\hat{H}$, dual de H) on a alors la

Proposition III.2.1.

Les orbites de $\hat{H}$ sont les supersurfaces suivantes :

a/ $P_\alpha P^\alpha = \underline{p}^2 > 0$, $\omega = 0$: $\alpha/\Omega_o^{++}(p^o > 0)$; $\beta/\Omega_o^{+-}(p^o < 0)$

b/ $P_\alpha P^\alpha = \underline{p}^2 < 0$, $\omega = 0$: Ω_o^-

c/ $P_\alpha P^\alpha = \underline{p}^2 = 0$, $p^o \neq 0$, $\omega = 0$: $\alpha/\Omega_o^{o+}(p^o > 0)$; $\beta/\Omega_o^{o-}(p^o < 0)$

d/ $P_\alpha P^\alpha = 0$, $p^o = 0$, $\omega = 0$: Ω_o^{oo}

e/ $\Omega_\omega = \{\omega\} \times \hat{T}_4$, $\omega \neq 0$

Démonstration :

Désignons par $g = (h,k)$ l'élément générique de G. Sa loi de groupe va s'écrire :

$$(h,k)\,(h',k') = (h + k(h') \,,\, kk') \qquad (2)$$

où $k(h') = k\, h'\, k^{-1}$ définit l'homomorphisme de K dans le groupe GL(5,R) (des automorphismes de H) qui caractérise le produit semi-

direct (1) et qui est, simplement, une représentation penta-dimensionnelle (réelle) de K.

L'action de $\hat{h}$ sur H est définie par

$$\langle \hat{h}, h \rangle = e^{i(\omega\theta + \underline{p}.\underline{a})} \quad \text{où} \quad \underline{p}.\underline{a} = g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha}\, a^{\beta} \tag{3}$$

qui traduit le fait que l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de H (qui sont unidimensionnelles) s'identifie à l'espace topologique $\hat{H}$.

Si l'on pose $k = (0,0,\underline{b},A)$, on obtient

$$k\, h\, k^{-1} = (\theta - r\,\underline{a}\,.\,\Lambda(A)^{-1}\underline{b}\ ,\ \Lambda(A).\underline{a}\ ,\ 0,1) \tag{4}$$

Le groupe K opère naturellement dans $\hat{H}$ comme suit : à tout couple $\langle k, \hat{h} \rangle \in K \times \hat{H}$ correspond un élément $k(\hat{h}) \in \hat{H}$ défini par

$$k(\hat{h})(h) = \langle \hat{h},\, k^{-1}(h) \rangle \tag{5}$$

quant à H, il opère trivialement sur $\hat{H}$. Ce qui va nous permettre de déterminer les orbites de K dans $\hat{H}$.

Si l'on pose $k(\hat{h}) = (\omega', \underline{p}', 0, 1)$, alors les relations (4) et (5) impliquent

$$k(\hat{h})(h) = e^{i\{\omega\theta + (\Lambda(A)^{-1}\underline{p} - r\omega\Lambda(A)^{-1}\underline{b}).\underline{a}\}} = e^{i(\omega'\theta + \underline{p}'.\underline{a})} \tag{6}$$

d'où , par identification

$$\omega' = \omega \tag{7-a}$$

$$\underline{p}' = \Lambda(A)^{-1}\,\underline{p} - r\omega\,\Lambda(A)^{-1}\,\underline{b} \tag{7-b}$$

en conséquence, nous avons à distinguer deux cas, selon la valeur de ω:

1°/ $\underline{\omega \neq 0}$

Soient $\underline{p}$ et $\underline{p}'$ deux éléments quelconques dans T_4 et A_1 un élément arbitraire de SL(2,C). Si l'on considère l'élément

$k = (0,0,\underline{b}_1,A_1)$ de K, où

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{r\omega} \left(\underline{p} - \Lambda(A_1)^{-1}\, \underline{p}'\right)$$

il va vérifier

$$\Lambda(A_1)^{-1}\, \underline{p} - r\omega\, \Lambda(A_1)^{-1}\, \underline{b}_1 = \underline{p}'$$

d'où il s'ensuit que les orbites, dans ce cas, sont les supersurfaces $\Omega_\omega = \{\omega\} \times \hat{T}_4$, ω étant un réel arbitraire non nul.

2°/ $\underline{\omega = 0}$

auquel cas, la relation (7-b) se réduit à

$$\underline{p}' = \Lambda(A)^{-1}\, \underline{p}$$

et l'on se retrouve dans une situation analogue à celle du groupe de Poincaré [31] où l'on a quatre classes d'orbites caractérisées par :

a/ $p_\alpha\, p^\alpha = \underline{p}^2 > 0$: $\alpha/\ p^\circ > 0$; $\beta/p^\circ < 0$

b/ $p_\alpha\, p^\alpha = \underline{p}^2 < 0$

c/ $p_\alpha\, p^\alpha = \underline{p}^2 = 0$: $\alpha/p^\circ > 0$; $\beta/p^\circ < 0$

d/ $p_\alpha\, p^\alpha = 0$

d'où le résultat escompté. Quant aux stabilisateurs respectifs, ils sont déterminés par la

Proposition III.2.2.

Les stabilisateurs de $\hat{H}$ sont les sous-groupes :

a/ $K_o^{+\pm} = T'_4 \wedge SU(2,C)$ $(\Omega_o^{+\pm})$

b/ $K_o^{-} = T'_4 \wedge SL(2,R)$ (Ω_o^{-})

c/ $K_o^{o\pm} = T'_4 \wedge \tilde{E}_2$; $\Omega_o^{o\pm}$ *(où* $\tilde{E}_2$ *est le groupe de recouvrement du groupe euclidien du plan à deux feuillets).*

d/ $K_o^{oo} = T'_4 \wedge SL(2,C)$ (Ω_o^{oo})

e/ K_ω *est un sous-groupe de* K *isomorphe à* $SL(2,C)$ (Ω_ω)

Démonstration :

Considérons d'abord l'orbite Ω_ω. Soient $(\underline{p}_o,\omega)$ un point quelconque de Ω_ω et A un élément arbitraire de SL(2,C). On peut écrire :

$$\Lambda(A)\,\underline{p}_o = \underline{p}_o - (\underline{p}_o - \Lambda(A)\,\underline{p}_o)$$

Si l'on prend maintenant

$$\underline{b} = \frac{1}{r\omega}\,(\underline{p}_o - \Lambda(A)\,\underline{p}_o) \qquad (8)$$

on voit que $(0,0,\underline{b},A)$ est un élément du stabilisateur $K(\underline{p}_o,\omega)$ du point $(\underline{p}_o,\omega)$

Inversement, si $(0,0,\underline{b},A)$ est un élément de $K(\underline{p}_o,\omega)$, la relation (7-b) montre que le facteur $\underline{b}$ est de la forme (8).

Donc $K(\underline{p}_o,\omega)$ est constitué par les éléments $(0,0,\underline{b},A)$ où $\underline{b}$ est donné par la relation (8). Le calcul de sa loi de groupe conduit à

$$(0,0,\frac{1}{r\omega}\,(\underline{p}_o - \Lambda(A_1)\underline{p}_o),A_1)(0,0,\frac{1}{r\omega}\,(p_o - \Lambda(A_2)\underline{p}_o),A_2)$$
$$= (0,0,\frac{1}{r\omega}\,(\underline{p}_o - \Lambda(A_1\,A_2)\underline{p}_o),\,A_1\,A_2) \qquad (9)$$

relation qui montre que $K(\underline{p}_o,\omega)$ est isomorphe à SL(2,C).

Pour ce qui concerne les autres cas ($\omega = 0$), les relations (7) montrent que les stabilisateurs associés sont des sous-groupes inhomogènes du groupe de Poincaré : le facteur inhomogène est (toujours) égal à T'_4 et le facteur homogène est égal (respectivement) à SU(2,C), SL(2,R), $\tilde{E}_2$ et SL(2,C).

Proposition III.2.3.

La décomposition $H \wedge K$ *du groupe* G *est un produit semi-direct*

régulier ; les sous-groupes H *et* K *sont fermés dans* G *et* G *est un groupe localement compact séparable de type I.*

Démonstration :

Pour démontrer que le produit semi-direct $H \wedge K$ est régulier, il suffit qu'on trouve un borélien de $\hat{H}$ qui rencontre chaque orbite en un point et un seul. Pour ce faire soient les sous-ensembles $(\hat{B}_i)_{i=1,..,6}$ de $\hat{H}$ définis par

$\hat{B}_1 = \{(0,\underline{p},0,1)\}$ où $\underline{p}$ est tel que $p^1 = p^2 = p^3 = 0$

$\hat{B}_2 = \{(0,\underline{p},0,1)\}$ où $\underline{p}$ est tel que $p^\circ = p^2 = p^3 = 0$

$\hat{B}_3 = \{(0,\underline{p}_\circ,0,1)\}$ où $\underline{p}_\circ = (1,-1,0,0)$

$\hat{B}_4 = \{(0,\underline{p}_1,0,1)\}$ où $\underline{p}_1 = (-1,1,0,0)$

$\hat{B}_5 = \{(\theta,0,0,1)\}$ où $\theta \in R - \{0\}$

$\hat{B}_6 = \{(0,\underline{p}_2,0,1)\}$ où $\underline{p}_2$ est un élément fixé de T_4

Il est évident que ce sont des boréliens de $\hat{H}$, il s'ensuit que $\hat{B} = \bigcup_{i=1}^{6} \hat{B}_i$ est également un borélien de $\hat{H}$; et l'on peut vérifier facilement que B rencontre chaque orbite en un point, et un seul.

Le fait que G est un groupe localement compact séparable et que H et K en sont des sous-groupes fermés est une conséquence directe de la structure même de G et de la définition de sa topologie (en tant que topologie produit).

Quant au caractère type I de G, c'est une conséquence [32/] du fait que G est un produit semi-direct régulier tel que le stabilisateur de tout point du dual (du facteur inhomogène) est lui-même de type I.

Corollaire III.2.1.

1/ Toute représentation unitaire de G peut être décomposée, de façon unique, en une intégrale directe (éventuellement discrète) de ses représentations unitaires irréductibles.

2/ Toutes les r.u.i. de G sont induites, selon la démarche ci-dessous explicitée, par les r.u.i. de ses stabilisateurs.

Démonstration :

Elle est une conséquence immédiate de la proposition III.2.3. et des résultats fondamentaux de Mackey sur les produits semi-directs.

Il nous reste donc à établir la forme de ces représentations (u.i.) :

Soit $K_{\hat{h}_o}$, le stabilisateur de $\hat{h}_o$ qui appartient à l'orbite Ω (on sait que les stabilisateurs associés à une même orbite sont isomorphes) et soit Γ une fonction (arbitraire) de Ω dans K qui à $\hat{h} \in \Omega$ fait correspondre $\Gamma_{\hat{h}}$ telle que

$$\Gamma_{\hat{h}}(\hat{h}_o) = \hat{h}$$

alors les r.u.i. sont toutes obtenues (à une équivalence unitaire près) en choisissant une orbite Ω de K dans $\hat{H}$ et une r.u.i. L du stabilisateur $K_{\hat{h}_o}$ opérant dans un espace de Hilbert H_L ; ces représentations opèrent dans l'espace de Hilbert $L^2_\mu(\Omega, H_L)$ des fonctions définies sur Ω à valeurs dans H_L telle que

$$\int_\Omega \|F(\hat{h})\|_{H_L} \, d\mu(\hat{h}) < 0 \qquad (10)$$

où $d\mu(\hat{h})$ est une mesure invariante par K concentrée sur Ω, suivant

$$\{U(h_1,k_1)F\}(\hat{h}) = \langle \hat{h}, h_1 \rangle \, L\left(\Gamma_{\hat{h}}^{-1} \, k_1 \, \Gamma_{k_1^{-1}(\hat{h})}\right) F\left(k_1^{-1}(\hat{h})\right) \qquad (11)$$

Les mesures $d\mu$ (qui sont uniques à un facteur constant près) sont données, pour les diverses orbites, par :

$$\Omega_{\omega_o} : d\mu(\omega,\underline{p}) = \delta(\omega-\omega_o)\, d\omega\, d^4\underline{p}$$

$$\Omega_o^{+\pm}\ (p_\alpha\, p^\alpha = M^2) : d\mu(\omega,\underline{p}) = \delta(\underline{p}^2 - M^2)\, \delta(\omega)\, \varepsilon(\pm p^o)\, d\omega\, d^4\underline{p}$$

$$\Omega_o^{-}\ (p_\alpha\, p^\alpha = -\mu^2,\ \mu > 0) : d\mu(\omega,\underline{p}) = \delta(\underline{p}^2 + \mu^2)\, d\omega\, d^4\underline{p} \qquad (12)$$

$$\Omega_o^{o\pm}\ (p_\alpha\, p^\alpha = 0,\ p^o \neq 0) : d\mu(\omega,\underline{p}) = \delta(\underline{p}^2)\, \varepsilon(\pm p^o)\, d\omega\, d^4\underline{p}$$

$$\Omega_o^{oo} : d\mu(\omega,\underline{p}) \text{ est la mesure triviale}$$

où δ est la mesure de Dirac et ε la fonction qui est définie par : $\varepsilon(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $\varepsilon(t) = 1$ pour $t > 0$.

Quant à l'ensemble maximal d'opérateurs (algébriquement indépendants) simultanément diagonalisables dont les valeurs propres vont caractériser les r.u.i., on peut considérer, par exemple, soit la chaîne $G \supset T_4 \wedge SL(2,C) \supset \ldots$, soit $G \supset T'_4 \wedge SL(2,C) \supset \ldots$, où les points de suspension correspondent aux chaînes associées au groupe de Poincaré. Aussi, la sous-algèbre abélienne, de l'algèbre enveloppante de G, engendrée par $(I_o, I_1, I_2, W^2, P^2, P^\alpha)$ (resp. $I_o, I_1, I_2, V^2, Q^2, Q^\alpha$) est une sous-algèbre abélienne maximale déduite de la chaîne $G \supset T_4 \wedge SL(2,C) \supset T_4$ (resp. $G \supset T'_4 \wedge SL(2,C) \supset T'_4$), en prenant les invariants des deux premiers facteurs et (tous) les générateurs du dernier.

Remarques III.2.

1/ Si l'on pose $G_{\hat{h}_o} = H \wedge K_{\hat{h}_o}$, on obtient

$$G/G_{\hat{h}_o} = H \wedge K / H \wedge K_{\hat{h}_o} \sim K/K_{\hat{h}_o} \sim \Omega_{\hat{h}_o}$$

Aussi, réaliser la représentation dans $L^2_\mu(\Omega_{\hat{h}_o}, \mathcal{H}_L)$ revient à la réaliser dans l'espace $L^2_\mu(G/G_{\hat{h}_o}, \mathcal{H}_L)$. On peut également considérer des réalisations à l'aide d'espaces fonctionnels de fonctions définies sur le groupe lui-même.

2/ Les représentations de G associées aux orbites planes ($\omega = 0$) ne sont pas fidèles et sont incompatibles avec les relations de Heisenberg généralisées : $(P^\alpha, Q^\beta) = g^{\alpha\beta}\, D$.

3/ L'étude des représentations de (presque) tous les groupes de Lie L qui interviennent en physique repose entièrement sur l'utilisation d'une sous-algèbre A, de l'algèbre enveloppante $U(L)$, ayant les propriétés suivantes :

a/ A est sous-algèbre abélienne maximale.

b/ Si d est le nombre de paramètres essentiels de L et i la dimension algébrique du centre de $U(L)$ (ou du corps enveloppant de L), on a la relation $2m = d+i$, où m est la dimension algébrique de A.

Il s'ensuit, d'après ce qui précède, que notre groupe s'insère dans cette famille. Il convient cependant de noter, qu'exceptés quelques résultats éparses, on n'a aucune idée sur la classe de tous les groupes qui vérifient la relation $2m = d+i$, démontrée initialement par Racah [33/] pour les algèbres semi-simples compactes ; ce problème est d'un intérêt fondamental aussi bien dans le cadre de la théorie des représentations que dans celui de ses applications en physique, puisque les valeurs propres des représentants de A sont connectés avec la définition des nombres quantiques.

III.3. Représentations locales de $H_4 \oplus SL(2,C)$

Nous allons tout d'abord expliciter certaines notions qui vont nous servir par la suite.

Soient H un espace de Banach (ou plus généralement un espace vectoriel topologique) et A une algèbre de Lie (réelle ou complexe).

Définition III.3.1.

Une représentation locale de A dans H est définie par la donnée d'une application qui associe à chaque $X \in A$ un opérateur linéaire $\rho(X)$ de domaine $D(\rho(X)) \subset H$ dense telle que :

a/ il existe un sous-espace $H_1 \subset H$ invariant dense et commun

b/ $\forall \varphi \in H_1$; $\forall X,Y \in A$; $\forall \lambda \in K$ (= R ou C, *selon le cas*):

$$\rho(\lambda X+Y)\varphi = \lambda\rho(X)\varphi + \rho(Y)\varphi$$

$$\rho([X,Y])\varphi = \rho(X)\,\rho(Y)\varphi - \rho(Y)\,\rho(X)\varphi$$

Si l'espace H est simplement un espace vectoriel algébrique, on obtient la définition d'une représentation locale (algèbrique), en considérant la même définition, mais avec $H_1 = H$.

Dans la pratique, on définit toujours une représentation locale par la donnée d'un système d'opérateurs représentant une base (X_k) de A que l'on appelle base de la représentation. La dénomination de représentations locales vient du fait que celles-ci peuvent s'exponentier à un groupe de Lie local. Dans la suite, quand il n'y a aucune confusion à craindre, on omettra l'adjectif local.

Supposons que A est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$. Il existe des relations bien établies entre les représentations de dimension finie (pas nécessairement unitaire) de A et celles de $\mathfrak{A}$; ainsi,

l'irréductibilité de ces dernières se trouve définie de la même façon (sans ambiguité) que celle des représentations des groupes de Lie ; étant donné que, dans ce cas, toute représentation est intégrable, et la représentation intégrée est irréductible si et seulement si la représentation locale de départ l'est.

En dimension infinie, la situation est beaucoup plus complexe ; d'ailleurs la notion d'irréductibilité n'est déjà pas unique pour les représentations non unitaires de groupes de Lie.

Définition III.3.2.

Une représentation locale ρ est dite Schur-irréductible si les seuls opérateurs (continus, dans le cas topologique) qui commutent avec tous les $\rho(X)$ sont les multiples scalaires de l'identité.

Il faut remarquer que la notion de commutativité de deux opérateurs (dans le cas topologique) doit être précisée chaque fois, puisque les $\rho(X)$ sont en général des opérateurs non bornés, ce qui entraine l'existence de plusieurs définitions de commutativité non équivalentes.

Définition III.3.3.

Une représentation ρ d'une algèbre de Lie A dans un espace vectoriel algébrique V est dite algébriquement irréductible si les seuls sous-espaces invariants de V sont V et $\{0\}$.

Sauf mention du contraire, on se restreint dans la suite aux représentations algébriques dans des espaces vectoriels complexes.

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, A se plonge dans $\mathcal{U}(A)$ et si $(X_1,\ldots,X_n)$ est une base de A, les monômes

$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ entiers $\geqslant 0$) forment une base de l'espace vectoriel $U(A)$. On sait en outre que toute représentation ρ de A se prolonge de manière unique en une représentation ρ' de $U(A)$ et l'application $\rho \to \rho'$ est une bijection, entre l'ensemble des représentations de A et l'ensemble des représentations de $U(A)$, qui conserve l'irréductibilité. Aussi, l'espace partant d'une représentation (algébriquement) irréductible est nécessairement de dimension dénombrable.

En dimension finie, il y a équivalence entre l'irréductibilité-Schur et l'irréductibilité algébrique. Ce n'est plus le cas en dimension infinie (cf [34] où l'on trouve un exemple de représentation locale de $SU(2)$, Schur-irréductible sans être algébriquement irréductible) ; néanmoins, on a le [35]

Lemme III.3.1.

Toute représentation algébriquement irréductible est Schur-algébriquement irréductible.

Il nous arrivera, dans la suite, de noter par la même lettre un élément et son représentant et de désigner par "représentation irréductible" une représentation algébriquement irréductible, ceci évidemment en l'absence de tout risque d'ambiguité.

Proposition III.3.1.

Il existe une classe de représentations irréductibles de $H_4 \circledS SL(2,C)$ qui s'obtient en considérant la somme directe de représentations irréductibles de H_4 et celles d'une algèbre de Lorentz homogène dans le corps enveloppant de $H_4 \circledS SL(2,C)$.

Démonstration :

Rappelons que le corps enveloppant $K(A)$ d'une algèbre de Lie A est par définition le corps des fractions de $U(A)$. Ceci étant, soient $(B^{\alpha\beta})$ les six éléments de $K(H_4 \oplus SL(2,C))$ définis par :

$$B^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} - (1/D)\,(Q^{\alpha} P^{\beta} - Q^{\beta} P^{\alpha}) \qquad (1)$$

Ils satisfont aux relations de commutation

$$\left(B^{\alpha\beta}, B^{\gamma\delta}\right) = -\,(g^{\alpha\gamma} B^{\beta\delta} + g^{\beta\delta} B^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\delta} B^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma} B^{\alpha\delta}) \qquad (2\text{-a})$$

$$\left(B^{\alpha\beta}, P^{\gamma}\right) = \left(B^{\alpha\beta}, Q^{\gamma}\right) = \left(B^{\alpha\beta}, D\right) = 0 \qquad (2\text{-b})$$

et l'on a par ailleurs,

$$\left(P^{\alpha}, Q^{\beta}\right) = g^{\alpha\beta} D \qquad (2\text{-c})$$

Les équations (2) montrent que les éléments $(B^{\alpha\beta}, P^{\gamma}, Q^{\delta}, D)$ sont (algébriquement) libres et engendrent une algèbre de Lie qui est somme directe de l'algèbre engendrée par $(B^{\alpha\beta})$ (isomorphe d'après (2-a) à l'algèbre de Lorentz homogène) et de H_4, soit G_1.

Soit maintenant ρ une représentation locale irréductible de $H_4 \oplus SL(2,C)$ dans un espaçe vectoriel complexe V (donc de dimension algébrique dénombrable). Le lemme III.3.1. implique que les invariants de $H_4 \oplus SL(2,C)$ sont représentés par des opérateurs scalaires, en particulier $\rho(D) = dI$ où d est un nombre complexe que l'on suppose différent de zéro. ρ est, évidemment, parfaitement définie par la donnée de sa base $(\rho(M^{\alpha\beta}), \rho(P^{\gamma}), \rho(Q^{\delta}), \rho(D))$ qui équivaut, compte-tenu de la représentation associée à $U(H_4 \oplus SL(2,C))$ et des relations (1), à la donnée des opérateurs $(\rho(B^{\alpha\beta}), \rho(P^{\gamma}), \rho(Q^{\delta}), \rho(D))$ qui, par leurs relations de commutation (déduites de (2)), constituent une base d'une représentation locale, soit ρ_1, de l'algèbre de Lie G_1, qui est également irréductible, comme on peut le voir de façon évidente.

En conséquence, une classe de telles représentations ρ, est déterminée par la donnée des représentations locales irréductibles de H_4 (telles que le centre ne soit pas trivialement représenté) et celles de l'algèbre de Lorentz homogène. Ces représentations font partie de celles qui sont compatibles avec les relations de Heisenberg généralisées. Bien que deux représentations qui ne diffèrent que par la valeur de D soient mathématiquement inéquivalentes, elles ont la même signification physique, étant donné qu'on peut passer de l'une à l'autre par multiplication par un facteur convenable, ce qui revient simplement à un changement des unités physiques, eu égard à l'interprétation du générateur D que nous avons postulé au deuxième chapitre. Aussi, on peut se restreindre, sans perte de généralité , aux représentations locales pour lesquelles D est effectivement l'identité.

Remarques III.3.

1/ On ne connait pas encore toutes les représentations locales irréductibles de H_4, néanmoins on peut en déterminer une classe non négligeable de la façon suivante : soit H_1 la sous-algèbre engendrée par $(P^\alpha, Q^\alpha, 1)$, pour α fixé, si l'on pose $(p = g^{\alpha\alpha} P^\alpha, q = Q^\alpha)$, $U(H_1)$ est l'algèbre associative unifère définie par les deux générateurs (p,q) et la relation $(p,q)=1$; en outre $U(H_4) = U(H_1)\otimes U(H_1)\otimes U(H_1)\otimes U(H_1)$. En conséquence, à partir des représentations irréductibles de $U(H_1)$ qu'on connait (cf par exemple [35/ 36/]), on peut déduire (par produit tensoriel) des représentations irréductibles de $U(H_4)$ qui nous fournissent, à leur tour, une famille de représentations locales irréductibles de H_4.

2/ H_4 étant un groupe de Lie nilpotent, toutes ses r.u.i. sont induites par une représentation de dimension un d'un sous-groupe [37/]. Aussi, en effectuant des coupures convenables dans l'espace des variables qui définissent ces représentations, on pourrait obtenir des représentations locales (topologiques) de H_4.

Nous avons considéré jusqu'à maintenant que des représentations d'algèbre de Lie sans nous inquiéter de savoir si elles conduisent ou non à des représentations d'un groupe de Lie correspondant. Nous allons remédier (partiellement) à cette situation en rappelant certains concepts ayant trait à l'intégrabilité des représentations des algèbres de Lie réelles, que nous allons utiliser (en vue des applications physiques) dans la recherche d'une condition suffisante pour que l'impulsion-énergie (P^α) et les coordonnées de l'espace-temps (Q^α) aient des spectres continus dans une représentation locale de $H_4 \circledS SL(2,C)$.

Soient G un groupe de Lie, G son algèbre de Lie et T une représentation de G dans un espace de Banach H. A tout $X \in G$ correspond un sous-groupe à un paramètre $e^{tX} \in G$; Le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $T(e^{tX})$ est par définition l'opérateur $dT(X)$ défini par

$$dT(X)\,(\varphi) = \lim_{t\to 0} \frac{T(e^{tX})-I}{t}\,\varphi \qquad (1)$$

pour tout $\varphi \in H$ tel que cette limite existe. Le premier domaine, dense dans H, pour lequel (1) définit une représentation de G, fut introduit par Gärding. D'autres domaines, ayant le même propriété que ce dernier, furent introduits depuis, qui, en outre, sont plus appropriés pour la formulation du problème réciproque de l'intégrabilité d'une représentation de l'algèbre de Lie G.

Définition III.3.4.

On dit qu'une représentation ρ *d'une algèbre de Lie G est intégrable s'il existe une représentation* T *d'un groupe de Lie, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie G telle que* ρ *soit contenue dans sa différentielle* dT *(i.e. pour tout* $X \in G$, $\rho(X)$ *coïncide, sur son domaine de définition, avec* $dT(X)$*).*

Des critères d'intégrabilité, de plus en plus généraux, ont été récemment donnés (cf. les articles cités dans la référence [28]), qui sont tous fondés sur le concept de vecteur analytique, notion introduite originellement lors de la recherche d'un lien entre les sous-espaces invariants par T et ceux invariants par dT.

Définition III.3.5.

Un vecteur $\varphi \in H$ *est un vecteur analytique pour un opérateur* O *si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|O^n \varphi\|$ *a un rayon de convergence non nul.*

On a alors la

Proposition III.3.2.

Soit ρ *une représentation locale de* $H_4 \oplus SL(2,C)$ *dans un espace de Hilbert* V *séparable telle que :*

1/ $i\rho(P^\alpha)$ *et* $i\rho(Q^\beta)$ *sont auto-adjoints*

2/ Le sous-espace invariant dense commun E *est composé de vecteurs analytiques pour* $\rho(P^\alpha)$ *et* $\rho(Q^\beta)$

Alors :

1/ ρ *est intégrable à la sous-algèbre* H_4

2/ $\rho(P^\alpha)$ *et* $\rho(Q^\alpha)$ *ne possèdent aucun vecteur propre.*

Démonstration :

L'hypothèse 2/ implique (puisque l'on suppose $\rho(D) = 1$) que L est composé de vecteurs analytiques pour chacun des représentants de la base (P^α, Q^β, D) de l'algèbre H_4 et l'intégrabilité à H_4 découle de [38/].

Les vecteurs sur lesquels sont appliqués les opérateurs qui interviennent dans les calculs qui suivent sont supposés vérifier les propriétés requises (d'analycité et d'invariance) pour que ces calculs aient un sens.

Un raisonnement par récurrence et la relation

$(A,BC) = (A,B)C + B(A,C)$ impliquent :

$$(P^\alpha, (Q^\beta)^n) = n\, g^{\alpha\beta}\, (Q^\beta)^{n-1} \tag{1}$$

en outre

$$\begin{aligned}(P^\alpha, e^{tQ^\alpha}) &= \left(P^\alpha, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ^\alpha)^n}{n!}\right) \\ &= (P^\alpha, I) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (P^\alpha, (Q^\alpha)^n)\end{aligned} \tag{2}$$

Il s'ensuit, à partir des relations (1) et (2) :

$$\begin{aligned}(P^\alpha, e^{tQ^\alpha}) &= g^{\alpha\alpha}\, t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (Q^\alpha)^{n-1} \\ (P^\alpha, e^{tQ^\alpha}) &= g^{\alpha\alpha}\, t\, e^{tQ^\alpha}\end{aligned} \tag{3}$$

d'où, en multipliant (3) à droite par e^{-tQ^α}

$$e^{tQ^\alpha}\, P^\alpha\, e^{-tQ^\alpha} = P^\alpha - g^{\alpha\alpha}\, t \tag{4}$$

Supposons que φ soit un vecteur propre de P^α relativement à la valeur propre λ, la relation (4), appliquée à φ, donne :

$$P^\alpha\, e^{-tQ^\alpha} \varphi = (\lambda - g^{\alpha\alpha}\, t)\, e^{-tQ^\alpha} \varphi \tag{5}$$

Si t est réel, $e^{-tQ^{\alpha}}$ est unitaire, d'après le théorème de Stone ; il est donc injectif et la relation (5) montre que $e^{-tQ^{\alpha}}$ est également vecteur propre de P^{α} relativement à la valeur propre $(\lambda - g^{\alpha\alpha} t)$, pour tout scalaire réel t ; ce qui est absurde, étant donné qu'on a supposé l'espace de Hilbert séparable.

III.4. Représentations de Miller de l'algèbre de Lie complexe E_3.

Soit (J_1, J_2, J_3) une base de l'algèbre de Lie réelle $SO(3)$. Une base de Cartan-Weyl de sa complexifiée (que nous désignerons également par $SO(3)$) est fournie par

$$J^{\pm} = \mp J_2 + i J_1 \quad ; \quad J^3 = i J_3 \tag{1}$$

avec les relations de commutation

$$\begin{aligned} (J^3 , J^{\pm}) &= \pm J^{\pm} \\ (J^+ , J^-) &= 2 J^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Le centre de $U(SO(3))$ est unidimensionnel et engendré par

$$Q = J^+ J^- + J^3 J^3 - J^3 = J^- J^+ + J^3 J^3 + J^3 \tag{3}$$

Dans ce qui suit, les éléments d'une algèbre de Lie et leurs représentants seront notés par les mêmes lettres.

Miller [39] a construit et classifié toutes les représentations irréductibles de $SO(3)$ dans un espace vectoriel algébrique complexe V ($\neq \{0\}$) telles que J^3 ait une valeur propre de multiplicité finie. Si l'on note S le spectre de J^3 et l'on appelle complexe admissible tout nombre complexe ℓ qui vérifie soit $\ell = -\frac{1}{2}$, soit $\ell = (-\frac{1}{2}) + \rho\, e^{i\varphi}$ où $\rho > 0$ et $0 \leqslant \varphi < \pi$, alors :

Toute représentation de Miller de $SO(3)$ est équivalente à l'une des représentations de la liste suivante :

1/ Les représentations $D(\ell, m_o)$, où ℓ est un complexe admissible et m_o un nombre complexe vérifiant $0 \leqslant \text{Ré } m_o < 1$ et $\ell \pm m_o \notin Z$, pour lesquelles $S = \{m_o + n \; ; \; n \in Z\}$

2/ Les représentations $\downarrow_\ell^-$, définies pour tout ℓ admissible, pour lesquelles $S = \{-\ell - 1 - n \; ; \; n \in N\}$

3/ Les représentations $\uparrow_\ell^+$, définies pour tout ℓ admissible, pour lesquelles $S = \{\ell + 1 + n \; ; \; n \in N\}$

4/ Les représentations $\downarrow_\ell^+$, définies pour tout ℓ admissible différent de $(h-1)/2$ où $h \in N$, pour lesquelles $S = \{\ell - n \; ; \; n \in N\}$

5/ Les représentations $\uparrow_\ell^-$, définies pour tout ℓ admissible différent de $(h-1)/2$ où $h \in N$, pour lesquelles $S = \{-\ell + n \; ; \; n \in N\}$

6/ Les représentations $D(h/2)$, définies pour tout $h \in N$, pour lesquelles $S = \{h/2 - n \; ; \; n \in N, \; 0 \leqslant n \leqslant h\}$

où N et Z sont respectivement les entiers positifs ou nuls et les entiers algébriques.

Pour chacune de ces représentations il existe une base $(f_m)_{m \in S}$ telle que

$$\begin{aligned} J^3 f_m &= m f_m \\ J^+ f_m &= \{(\ell+m+1)(\ell-m)\}^{1/2} f_{m+1} \\ J^- f_m &= \{(\ell+m)(\ell-m+1)\}^{1/2} f_{m-1} \\ Q f_m &= \ell(\ell+1) f_m \end{aligned} \qquad (4)$$

Soit maintenant E_3 l'algèbre de Lie réelle du groupe euclidien de l'espace tridimensionnel. Si l'on note (P_1, P_2, P_3) les générateurs infinitésimaux des translations et l'on pose

$$P^\pm = \mp P_2 + i P_1 \quad ; \quad P^3 = i P_3 \qquad (5)$$

les éléments $(J^{\pm}, J^3, P^{\pm}, P^3)$ constituent une base de sa complexifiée (qu'on désignera également par E_3) selon laquelle les relations de commutation s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} (J^3 \ , \ J^{\pm}) &= \pm J^{\pm} \\ (J^+ \ , \ J^-) &= 2 \ J^3 \\ (J^3 \ , \ P^{\pm}) &= (P^3, J^{\pm}) = \pm P^{\pm} \\ (J^+ \ , \ P^-) &= (P^+, J^-) = 2 \ P^3 \end{aligned} \tag{6}$$

E_3 a deux invariants :

$$\vec{P}.\vec{P} = \sum_{i=1}^{3} P_i \ P_i \quad ; \quad \vec{P}.\vec{J} = \sum_{i=1}^{3} P_i \ J_i \tag{7}$$

Les représentations ρ (irréductibles dans un espace vectoriel algébrique complexe $V \neq \{0\}$) de Miller de l'algèbre E_3, que nous allons utiliser au prochain paragraphe, vérifient les propriétés suivantes :

(a) $V = \sum_{\ell \in S} \oplus \ V_\ell$, où S est un ensemble dénombrable de nombres complexes admissibles différents, la restriction de ρ à $SO(3)$ ayant l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} &(1) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus \ D(\ell, m_o) \\ &(2) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus \ \uparrow^+_\ell \\ &(3) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus \ \uparrow^-_\ell \\ &(4) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus \ \downarrow^+_\ell \\ &(5) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus \ \downarrow^-_\ell \\ &(6) \ \rho|_{SO(3)} = \sum_{\ell \in S} \oplus D(\ell) \end{aligned} \tag{8}$$

(b) $\vec{P}.\vec{P} = - \omega^2 \ I \ , \ \omega \neq 0$

Si l'on désigne par u et q deux nombres complexes tels que $u \neq 0$ et $q \geqslant 0$ ou bien $\mathrm{Im}\, q > 0$, alors toute représentation de Miller de E_3 est équivalente à l'une des représentations de la liste suivante :

α/ $W_j^+(u,q)$ où $1 \leqslant j \leqslant 6$, $S = \{q+n \; ; \; n \in N\}$ et la restriction de $W_j^+(u,q)$ à $SO(3)$ est de type j/ de la propriété a) ci-dessus. Si $j = 6$, $2q \in N$.

β/ $W_j^-(u,q)$ où $1 \leqslant j \leqslant 5$, $\mathrm{Im}\, q > 0$, $S = \{q-1-n \; ; \; n \in N\}$ et la restriction de $W_j^-(u,q)$ à $SO(3)$ est de type j/ de la propriété a) ci-dessus.

γ/ $W_j(u,q,\ell_o)$ où $1 \leqslant j \leqslant 5$, ℓ_o est un nombre complexe tel que $\mathrm{Im}\,\ell_o > 0$ et $0 \leqslant \mathrm{Re}\, \ell_o < 1$, $\ell_o \pm q \in Z$, $S = \{\ell_o+n, \; n \in Z\}$ et la restriction de $W_j(u,q,\ell_o)$ à $SO(3)$ est du type j/ de la propriété a) ci-dessus.

Pour chacune de ces représentations il existe une base $f_m^{(\ell)}$ où ℓ parcourt S, et pour ℓ fixé m décrit le spectre de J^3, telle que

$$\begin{aligned} J^3 \, f_m^{(\ell)} &= m \, f_m^{(\ell)} \\ J^{\pm} \, f_m^{(\ell)} &= \{(\ell \pm m + 1)(\ell \mp m)\}^{1/2} \, f_{m\pm1}^{(\ell)} \qquad (9) \\ Q \, f_m^{(\ell)} &= \ell(\ell+1) \, f_m^{(\ell)} \end{aligned}$$

$$P^3 \, f_m^{(\ell)} = (u/2)\left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(\ell+1)^2(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_m^{(\ell+1)} +$$

$$+ \frac{mu_q}{\ell(\ell+1)} f_m^{(\ell)} + (u/2)\left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell+m)(\ell-m)}{\ell^2(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_m^{(\ell-1)}$$

$$P^{\pm} \, f_m^{(\ell)} = \mp (u/2)\left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell\pm m+1)(\ell\pm m+2)}{(\ell+1)^2(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell+1)} + \qquad (10)$$

$$+ \left[(\ell\pm m+1)(\ell\mp m)\right]^{1/2} \frac{u_q}{\ell(\ell+1)} \, f_{m\pm1}^{(\ell)} +$$

$$\pm (u/2)\left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell\mp m)(\ell\mp m-1)}{\ell^2(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell-1)}$$

$$\vec{P}.\vec{P} = - u^2 f_m^{(\ell)} \quad ; \quad \vec{P}.\vec{J} = - u q f_m^{(\ell)} \quad ; \quad Q = \ell(\ell+1) \qquad (11)$$

Ces représentations et les bases associées seront dénommées respectivement dans la suite représentations de E_3 de type Miller et bases canoniques.

III.5. Représentations locales de SL(2,C)

En adoptant les notations de [40] pour l'algèbre $\mathcal{SL}(2,C)$, une base de sa complexifiée (qui sera désignée pareillement par $\mathcal{SL}(2,C)$) est fournie par :

$$H^{\pm} = i A_1 \mp A_2 \quad ; \quad H^3 = i A_3 \qquad (1)$$

$$F^{\pm} = i B_1 \mp B_2 \quad ; \quad F^3 = i B_3 \qquad (2)$$

Elle satisfait aux relations de commutation :

$$\begin{aligned}
&(H^+,H^3) = - H^+ \; ; \; (H^-,H^3) = H^- \; ; \; (H^+,H^-) = 2 H^3 \\
&(H^+,F^+) = (H^-,F^-) = (H^3,F^3) = 0 \\
&(F^+,F^3) = H^+ \; ; \; (F^-,F^3) = - H^- \; ; \; (F^+,F^-) = - 2 H_3 \\
&(H^+,F^3) = - F^+ \; ; \; (H^-,F^3) = F^- \\
&(H^+,F^-) = -(H^-,F^+) = 2 F^3 \\
&(F^+,H^3) = - F^+ \; ; \; (F^-,H^3) = F^-
\end{aligned} \qquad (3)$$

Une base de Cartan-Weyl de $\mathcal{SL}(2,C)$ est obtenue en procédant au changement de base suivant

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(H^3 + i F^3) \\
H' &= \frac{1}{2}(H^3 - i F^3) \\
X_\alpha &= \frac{1}{2}(F^- - i H^-) \\
X_\beta &= \frac{1}{2}(-F^- - i H^-) \\
X_{-\beta} &= \frac{1}{2}(-F^+ - i H^+)
\end{aligned} \qquad (4)$$

qui conduit aux relations :

$$
\begin{aligned}
&(H,H') = 0 \\
&(H,X_\alpha) = -X_\alpha \quad ; \quad (H,X_{-\alpha}) = X_{-\alpha} \\
&(H,X_\beta) = 0 \quad ; \quad (H,X_{-\beta}) = 0 \\
&(H',X_\alpha) = 0 \quad ; \quad (H',X_{-\alpha}) = 0 \\
&(H',X_\beta) = -X_\beta \quad ; \quad (H',X_{-\beta}) = X_{-\beta} \\
&(X_\alpha,X_{-\alpha}) = 2H \quad ; \quad (X_\beta,X_{-\beta}) = 2H' \\
&(X_\alpha,X_\beta) = (X_\alpha,X_{-\beta}) = (X_{-\alpha},X_\beta) = (X_{-\alpha},X_{-\beta}) = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

En conséquence, les racines $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ sont caractérisées par

$$
\begin{aligned}
&\alpha(H) = -1 \quad ; \quad \alpha(H') = 0 \\
&\beta(H) = 0 \quad ; \quad \beta(H') = -1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Quant aux invariants fondamentaux, qui sont au nombre de deux, ils s'expriment comme suit :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{2}\, g_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\delta}\, M^{\gamma\delta}\, M^{\alpha\beta} = \vec{A}^2 - \vec{B}^2 = H^- H^+ - F^- F^+ + H^3 H^3 - F^3 F^3 + 2H^3 \\
Q_2 &= \frac{1}{4}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, M^{\alpha\beta}\, M^{\gamma\delta} = \vec{A}.\vec{B} = \frac{1}{2}\,(H^- F^+ + F^- H^+) + H^3 F^3 + F^3
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Des relations (5) on déduit que $SL(2,C) = SO(3) \oplus SO(3)$. Aussi, une méthode de construction de représentations locales de l'algèbre de Lie (complexe) $SL(2,C)$ est fournie en considérant la somme directe de représentations de Miller de l'algèbre de Lie (complexe) $SO(3)$. Cependant, cette approche n'est pas (la plus) adéquate pour les applications physiques, puisqu'elle conduit à des représentations locales de l'algèbre (réelle) de Lorentz qui ne sont pas décomposées relativement à la sous-algèbre du groupe de rotations de l'espace.

Lemme III.5.1.

Soit (J_i, P_i) *une base d'une représentation de* E_3 *de type Miller. Si l'on pose*

$$A_i = J_i \tag{8-a}$$

$$B_\ell = -\frac{1}{2i\omega}\,(P_j, J_k) + \varepsilon_\ell^{jk} \tag{8-b}$$

on obtient une représentation locale de $SL(2,C)$.

Démonstration :

Il faut noter, en premier lieu, que les relations (8) (inspirées par [41]) traduisent , en réalité, une déformation de la représentation initiale, au niveau du corps enveloppant de E_3.
La démonstration de ce lemme est purement technique et repose principalement sur les relations de commutation de E_3 et de $SL(2,C)$.

Lemme III.5.2.

Dans une représentation locale de $SL(2,C)$ *du lemme précédent, la valeur des deux invariants est :*

$$Q_1 = q^2 - 1 \;;\; Q_2 = 0 \tag{9}$$

et l'action des générateurs sur la base canonique de la représentation de type Miller de E_3 *qui la définit est donnée par les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
F^{\pm}\, f_m^{(\ell)} &= \pm\frac{i}{2}\left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell\pm m+1)(\ell\pm m+2)}{(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell+1)} + \\
&\quad \pm\frac{i}{2}\left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell\mp m)(\ell\mp m-1)}{(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell-1)} \\
F^{3}\, f_m^{(\ell)} &= -\frac{i}{2}\left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_{m}^{(\ell+1)} + \\
&\quad +\frac{i}{2}\left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell-m)(\ell+m)}{(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_{m}^{(\ell-1)}
\end{aligned} \tag{10}$$

l'action de H^3 *(resp.* H^+, H^-*) étant identique à celle de* J^3 *(resp.* J^+, J^-*).*

Démonstration :

Des relations (1) et (8) il résulte :

$$H^{\pm} = J^{\pm} \quad ; \quad H^3 = J^3$$

$$F^{\pm} = \pm \frac{i}{2u} \{ (J^{\pm}, P^3)_+ - (J^3, P^{\pm})_+ \}$$

$$F^3 = \frac{i}{4u} \{ (J^-, P^+)_+ - (J^+, P^-)_+ \}$$

Les résultats escomptés s'obtiennent en appliquant les éléments $(H^{\pm}, H^3, F^{\pm}, F^3, Q_1, Q_2)$, exprimés en fonction des éléments $(J^{\pm}, J^3, P^{\pm}, P^3)$ à partir des relations (7) et (10) ci-dessus, à un élément de la base canonique de départ, et en remplaçant l'action de ces derniers opérateurs par son expression donnée par les relations (9) et (10) du paragraphe III.4.

Remarque III.5.1.

D'après le lemme III.5.2., les représentations locales de $SL(2,C)$ ainsi construites ne dépendent pas du paramètre u des représentations de E_3 qui ont servi à leur construction. Aussi, elles seront simplement notées : $W_j^+(q)$, $W_j^-(q)$ et $W_j(q, \ell_o)$

Lemme III.5.3.

Si l'on considère une représentation locale de $SL(2,C)$ *de la famille* $\{W_j^+(q), W_j^-(q), W_j(q,\ell_o)\}$ *agissant dans l'espace vectoriel* $V = \sum_{\ell \in S} \oplus V_\ell$ *et si l'on pose*

$$X_\ell^{\pm} = \frac{1}{(2\ell+1)} \{ (\ell + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}) F^3 \mp \tfrac{1}{2}(F^+H^- - F^-H^+) \} \qquad (11)$$

alors l'opérateur X_ℓ^+ *(resp.* X_ℓ^-*) applique* V_ℓ *dans* $V_{\ell+1}$ *(resp.* $V_{\ell-1}$*).*

Démonstration :

Il convient de remarquer que les opérateurs $X_\ell^\pm$, qui appartiennent à l'algèbre enveloppante, ne sont pas définis intrinsèquement mais dépendent de ℓ.

Si l'on applique $X_\ell^\pm$ à un vecteur $f_m^{(\ell)}$ de la base canonique de la représentation de départ, on trouve, en tenant compte des relations (10) :

$$X_\ell^\pm \, f_m^{(\ell)} = \mp \frac{i}{2} \left[\frac{(\ell+q+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2})(\ell-q+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2})(\ell+m+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2})(\ell-m+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2})}{(\ell+1\pm\frac{1}{2})(\ell\pm\frac{1}{2})} \right] 1/2 \; f_m^{(\ell\pm1)} \qquad (12)$$

Il en résulte que si l'on pose $X^\pm = \sum_{\ell\in S} \oplus X_\ell^\pm$, on obtient ce qu'on appelle habituellement des "opérateurs d'échelle".

Remarque III.5.2.

La connaissance des opérateurs $(H^\pm, H^3, F^\pm, F^3)$ équivaut à celle des opérateurs $(H^\pm, H^3, X^\pm)$, puisque l'on a :

$$F^\pm \, f_m^{(\ell)} = \{ \mp \frac{1}{(\ell\mp m)} \; X_\ell^+ \pm \frac{1}{(\ell\pm m+1)} \; X_\ell^- \} \; H^\pm \, f_m^{(\ell)}$$

$$F^3 \, f_m^{(\ell)} = (X_\ell^+ + X_\ell^-) \, f_m^{(\ell)}$$

Lemme III.5.4.

Si W est un sous-espace non trivial stable par l'une des représentations $\{W_j^+(q), W_j^-(q), W_j(q,\ell_o)\}$, *il contient nécessairement un vecteur de la base canonique* $f_m^{(\ell)}$.

Démonstration :

Soient $V = \sum_{\ell\in S} \oplus V_\ell$ l'espace portant d'une telle représentations et $(f_m^{(\ell)})$ la base canonique associée. Supposons qu'il existe

un sous-espace non trivial $W \subset V$ stable par la représentation . Si φ est un vecteur (non nul) de W, il va se décomposer selon

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\ell_i} \qquad \text{où} \quad \varphi_{\ell_i} \in V_{\ell_i} \tag{1}$$

L'action répétée (jusqu'à l'ordre n-1) de Q conduit au système :

$$\begin{cases} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\ell_i} \\ Q\varphi = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\ell_i+1)\, \varphi_{\ell_i} \\ \vdots \\ Q^{n-1}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \{\ell_i(\ell_i+1)\}^{n-1} \varphi_{\ell_i} \end{cases} \tag{2}$$

dont le déterminant est donné par :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \ell_1(\ell_1+1) & \ell_2(\ell_2+1) & \dots & \ell_n(\ell_n+1) \\ \{\ell_1(\ell_1+1)\}^2 & \{\ell_2(\ell_2+1)\}^2 & \dots & \{\ell_n(\ell_n+1)\}^2 \\ \vdots & & & \\ \{\ell_1(\ell_1+1)\}^{n-1} & \{\ell_2(\ell_2+1)\}^{n-1} & \dots & \{\ell_n(\ell_n+1)\}^{n-1} \end{vmatrix}$$

ce qui donne $\Delta = \prod_{i>j} \left(\{\ell_i(\ell_i+1)\} - \{\ell_j(\ell_j+1)\}\right)$

Or, par hypothèse, la multiplicité des représentations de $SO(3)$, dans la représentation de $SL(2,C)$ considérée est au plus l'unité, ce qui implique que Δ est différent de zéro ; il s'ensuit que le système (2) est résoluble, d'où il découle que φ_{ℓ_i} $(i = 1,\dots,n)$ sont des combinaisons linéaires des $Q^i\varphi (i = 0,\dots,n-1)$. Ainsi, φ_{ℓ_i} $(i = 1,\dots,n) \in W$. Compte tenu de (1), on peut poser

$$\varphi_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{p} C_j \, f_{m_j}^{(\ell_1)}$$

L'action répétée (jusqu'à l'ordre p-1) de J^3 conduit au système :

$$\begin{cases} \varphi_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{p} C_j \, f_{m_j}^{(\ell_1)} \quad , C_j \neq 0 \quad \forall j = 1,\ldots,p \\ J^3 \ \varphi_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{p} C_j \, m_j \, f_{m_j}^{(\ell_1)} \\ \vdots \\ (J^3)^{p-1} \ \varphi_{\ell_1} = \sum_{j=1}^{p} C_j (m_j)^{p-1} \, f_{m_j}^{(\ell_1)} \end{cases} \tag{3}$$

dont le déterminant est donné par :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ C_1 \, m_1 & C_2 \, m_2 & \cdots & C_p \, m_p \\ \vdots & & & \\ C_1 \, m_1^{p-1} & C_2 \, m_2^{p-1} & \cdots & C_m \, m_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

Ce qui donne : $\Delta' = C_1 \, C_2 \ldots C_p \prod_{i>j} \{m_i - m_j\}$ qui est différent de zéro puisque $C_i \neq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,p$ et $m_i \neq m_j$ si $i \neq j$ (étant donné que les m_i sont les valeurs propres de J^3 dans un espace portant une représentation irréductible de $SO(3)$). En conséquence, les vecteurs $(f_{m_j}^{(\ell_1)} \ ; \ j = 1,\ldots,p)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $((J^3)^p \varphi_{\ell_1} \ ; \ p = 0,\ldots,p-1)$. Ces derniers étant déjà dans W, il en est de même des premiers ; d'où le résultat désiré.

Théorème III.5.1.

Les représentations locales $(W_j^+(q),\ W_j^-(q),\ W_j(q,\ell_o))$ *de* $SL(2,C)$ *sont algébriquement irréductibles et deux à deux inéquivalentes.*

Démonstration :

L'irréductibilité algébrique découle du lemme III.5.4. et des relations (10) du lemme III.5.2. et de l'action de H^3 sur la b base canonique $f_m^{(\ell)}$.

Soient ρ et ρ' deux représentations différentes (paramétrées différemment) de $SL(2,C)$ appartenant à la famille considérée agissant respectivement sur les espaces vectoriels $V = \sum_{\ell \in S} \oplus V_\ell$ et $V' = \sum_{\ell' \in S'} \oplus V_{\ell'}$ et de base respective $(H^{\pm}, H^3, F^{\pm}, F^3)$ et $(H'^{\pm}, H'^3, F'^{\pm}, F'^3)$. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'elles soient équivalentes, c'est à dire qu'il existe un isomorphisme A de V sur V' tel que

$$\rho'(X)\ A\ \varphi = A_\rho(X)\varphi \qquad \forall \varphi \in V \text{ et } \forall X \in SL(2,C)$$

cette relation est, évidemment, encore satisfaite pour tout $X \in U(SL(2,C))$.

Soient alors $\ell \in S$ et φ un vecteur, non nul, appartenant à V_ℓ. On a : $Q'\ A\ \varphi = \ell(\ell+1)\ A\varphi$. Comme A est un isomorphisme, $A\ \varphi$ est un vecteur propre de Q' associé à la valeur propre $\ell(\ell+1)$; ce qui implique $\ell \in S'$, donc $S \subset S'$. On démontre de même que $S' \subset S$. Il s'ensuit que $S = S'$. La restriction de A au sous-espace V_ℓ montre que les représentations de $SO(3)$ agissant respectivement dans V_ℓ et V'_ℓ sont équivalentes, donc ρ et ρ' sont paramétrées exactement par les mêmes paramètres.

Les représentations locales de $SL(2,C)$, ainsi obtenues, apparaissent comme une généralisation des différenciées de représentations globales du groupe $SL(2,C)$, le paramètre q étant la généralisation du poids minimal des représentations du groupe des rotations contenues dans une représentation globale irréductible du groupe de Lorentz.

En effet ces dernières sont définies par [40] :

$$H_o^3 \, f_m^{(\ell)} = m \, f_m^{(\ell)}$$

$$H_o^{\pm} \, f_m^{(\ell)} = \{(\ell \pm m+1)(\ell \mp m)\}^{1/2} \, f_{m\pm1}^{(\ell)}$$

$$F_o^3 \, f_m^{(\ell)} = - \frac{i}{2(\ell+1)} \left[\frac{(\ell+q_o+1)(\ell-q_o+1)(\ell+m+1)(\ell-m+1)(\ell+\sigma_o+1)(\ell-\sigma_o+1)}{(\ell+3/2)\ (\ell+1/2)} \right] 1/2 \, f_m^{(\ell+1)}$$

$$- \frac{im q_o \sigma_o}{\ell(\ell+1)} \ f_m^{(\ell)}$$

$$+ \frac{i}{2\ell} \left[\frac{(\ell+q_o)(\ell-q_o)(\ell-m)(\ell+m)(\ell+\sigma_o)(\ell-\sigma_o)}{(\ell+1/2)\ (\ell-1/2)} \right] 1/2 \, f_m^{(\ell-1)} \qquad (I)$$

$$F_o^{\pm} \, f_m^{(\ell)} = \pm \frac{i}{2(\ell+1)} \left[\frac{(\ell+q_o+1)(\ell-q_o+1)(\ell \pm m+1)(\ell \pm m+2)(\ell+\sigma_o+1)(\ell-\sigma_o+1)}{(\ell+3/2)\ (\ell+1/2)} \right] 1/2 \, f_{m\pm1}^{(\ell+1)}$$

$$- \frac{i \, q_o \sigma_o}{\ell(\ell+1)} \left[(\ell \mp m)(\ell \pm m+1) \right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell)}$$

$$\pm \frac{i}{2\ell} \left[\frac{(\ell+q_o)(\ell-q_o)(\ell\ m)(\ell\ m-1)(\ell+\sigma_o)(\ell-\sigma_o)}{(\ell+1/2)\ (\ell-1/2)} \right] 1/2 \, f_{m\pm1}^{(\ell-1)}$$

$$Q_1 = q_o^2 + \sigma_o^2 - 1 \quad ; \qquad Q_2 = - i \, q_o \, \sigma_o$$

où $q_o \in N$ et σ_o un nombre complexe arbitraire.

Si $\sigma_o^2 = (q_o+n)^2$ pour un certain entier n positif, la représentation est de dimension finie, sinon elle est de dimension infinie.

Les représentations unitaires sont déterminées par les conditions suivantes :

1/ Les séries principales : σ_o est imaginaire pur et q_o un nombre positif quelconque entier ou demi-entier

2/ Les séries complémentaires : σ_o est un nombre réel tel que $0 \leqslant \sigma_o \leqslant 1$ et $q_o = 0$.

Par analogie avec le cas global, nous allons déterminer une famille de représentations locales irréductibles de $SL(2,C)$ qui contient, comme sous-famille, les représentations du théorème III.5.1.

Lemme III.5.5.

Soient (P_i, J_i) *et* (A_i, B_i) *respectivement les bases d'une représentation de Miller de* E_3 *et de la représentation locale de* $SL(2,C)$ *associée par le lemme III.5.1. . Alors*

$$A'_i = A_i$$

$$B'_j = B_j - (i\sigma/u)\, P_j$$

où σ *est un nombre complexe arbitraire, constituant une base d'une représentation locale de* $SL(2,C)$.

Démonstration :

Elle résulte des relations de commutation des algèbres E_3 et $SL(2,C)$.

Lemme III.5.6.

Dans une représentation locale de $SL(2,C)$ *du lemme précédent, l'action des générateurs sur la base canonique* $f_m^{(\ell)}$ *est donnée par les relations suivantes :*

$$F'^{\pm}f_m^{(\ell)} = \pm i \frac{(\ell+\sigma+1)}{2(\ell+1)} \left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell\pm m+1)(\ell\pm m+2)}{(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell+1)}$$

$$- \frac{i\sigma q}{\ell(\ell+1)} \left[(\ell\pm m+1)(\ell\mp m)\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell)}$$

$$\pm i \frac{(\ell-\sigma)}{2\ell} \left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell\mp m)(\ell\mp m-1)}{(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_{m\pm1}^{(\ell-1)}$$

$$F'^{3}f_m^{(\ell)} = - i \frac{(\ell+1+\sigma)}{2(\ell+1)} \left[\frac{(\ell+q+1)(\ell-q+1)(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(\ell+3/2)(\ell+1/2)}\right]^{1/2} f_m^{(\ell+1)} \quad (II)$$

$$- \frac{i\sigma m q}{\ell(\ell+1)} f_m^{(\ell)}$$

$$+ \frac{i(\ell-\sigma)}{2\ell} \left[\frac{(\ell+q)(\ell-q)(\ell-m)(\ell+m)}{(\ell+1/2)(\ell-1/2)}\right]^{1/2} f_m^{(\ell-1)}$$

l'action de H'^3 *(resp.* H'^+, H'^-*) étant identique à celle de* J^3 *(resp.* J^+, J^-*).*

Démonstration :

Elle est identique à celle du lemme III.5.2.

Notation III.5.

Désignons par $W_j^+(q,\sigma)$ (resp. $W_j^-(q,\sigma)$; $W_j(q,\sigma,\ell_o)$) les représentations locales de $SL(2,C)$ du lemme III.5.5., déduites des représentations $W_j^+(u,q)$ (resp. $W_j^-(u,q)$; $W_j(u,q,\ell_o)$) de E_3, telles que $q \pm \sigma$ (resp. $q \pm \sigma$; $\ell_o \pm\sigma$) n'est pas un entier négatif (resp. positif; algébrique.

Théorème III.5.2.

Les représentations locales $(W_j^+(q,\sigma)$; $W_j^-(q,\sigma)$; $W_j(q,\sigma,\ell_o))$ *de* $SL(2,C)$ *sont algébriquement irréductibles et deux à deux inéquiva-*

lentes. Les valeurs des deux invariants fondamentaux sont liées aux deux paramètres (q,σ) *par*

$$Q_1 = q^2 + \sigma^2 - 1 \quad ; \quad Q_2 = - i\, q\sigma$$

Démonstration :

Les valeurs des invariants se déduisent directement des relations (II) du lemme III.5.6.

La démonstration des propriétés restantes se fait, compte tenu des contraintes sur les paramètres introduites dans les notations III.5., de manière analogue à celle des mêmes propriétés relatives aux représentations qui interviennent dans le théorème III.5.1.

Remarques III.5.2.

1/ Les différenciées des représentations globales (habituelles) du groupe de Lorentz correspondent aux représentations $W_6^+(q,\sigma)$. Leur expression déduite des relations (II) est différente de (I) qui est celle généralement usitée (cf. cependant [42/]). En réalité, il s'agit simplement d'un choix différent des facteurs de phase (de la base canonique) dans les sous-espaces V_ℓ.

2/ Le théorème III.5.2. ne contient pas de représentations locales irréductibles de $SL(2,C)$ dont la restriction à $SO(3)$ se décompose en une somme directe finie de composantes irréductibles (ce qui représente la généralisation des représentations globales de dimension finie). Cependant de telles représentations peuvent se déduire de la classe $W_j^+(q,\sigma)$ en remplaçant la condition {$(q \pm \sigma)$ n'est pas un entier négatif} par {Il existe un entier positif k tel $\sigma^2 = (q+k)^2$} . En effet , soit S = {q,q+1,..,q+k}.

Pour j fixé {(j = 1,...,6) , pour j = 6 : $2q \in \mathbb{N}$} , considérons l'espace vectoriel $V = \sum_{\ell=q}^{q+k} \oplus V_\ell$, où chaque V_ℓ est l'espace portant d'une représentation de $SO(3)$, de type Miller de classe j et de poids (généralisé) ℓ. Alors les formules (II) définissent une représentation locale irréductible de $SL(2,C)$ dans V. On obtient ainsi une classe de représentations locales irréductibles $D_j(q,k)$ de $SL(2,C)$ ayant les mêmes propriétés que les classes $(W_j^+(q,\sigma)$; $W_j^-(q,\sigma)$; $W_j(q,\sigma,\ell_o))$: en particulier la restriction de la représentation $D_j(q,k)$ à la sous-algèbre $SO(3)$ est de la forme (j) de III.4.(a).

QUATRIEME CHAPITRE : SUR LES DEFORMATIONS DE L'ALGEBRE DE LIE $G = H_4 \oplus SL(2,C)$*

IV.1. Introduction

Il est établi que les constantes de structure des commutateurs des variables physiques caractérisent le niveau dans lequel on se place: Ainsi, au niveau classique, où l'on ne considère que des fonctions, tout est commutatif; au niveau quantique, les positions q_i (et les implusions p_i) commutent entre elles, alors que (q_i, p_i) est différent de zéro. On peut donc envisager des niveaux dans lesquels les q_i, par exemple, ne commutent plus entre elles. Au surplus, toute apparition de nouvelles limitations à notre faculté de définir telle ou telle grandeur physique ou, simplement, de nouvelles indéterminations la concernant, peut induire une modification des commutateurs où elle intervient.

Différentes approches de ce genre sont parues (de manière généralement non déclarée, à dire vrai) dans la littérature, ce avant même l'ébauche du support mathématique sous-jacent qui a débuté avec l'article de Gerstenhaber [2] : Ainsi, il fut suggéré dans [3] , à la suite de nouvelles indéterminations dans l'espace des moments relatif au domaine des chocs avec de très grandes énergies relatives, une modification du formalisme de la théorie quantique qui, correspond,

---

* Un résumé des principaux résultats de ce chapitre est paru dans [1].

en réalité, à l'abandon de la commutativité des composantes du moment, conception qui jouit actuellement d'une grande faveur auprès de certains théoriciens (dans le cadre de l'univers de de Sitter, entre autres). D'un autre point de vue Foldy [4/] a été amené, dans l'investigation d'une description covariante d'un système à n particules, à chercher comment déduire un hamiltonien relativiste en "perturbant" quelque peu un hamiltonien non relativiste, ce qui l'a conduit à l'étude des intéractions qui permettent de réaliser une représentation de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré à partir d'une représentation de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée.

La démarche ci-dessus n'est pas d'ailleurs spécifique aux transitions inter-niveaux fondamentaux de la physique (non relativiste, relativiste, quantique, sub-quantique...). Elle offre d'intéressantes perspectives d'application à l'intérieur même d'un niveau fixé ; par exemple pour les systèmes qui sont décrits, quand ils sont isolés, par la donnée d'une certaine algèbre de Lie telle que l'application d'une intéraction extérieure, tout en perturbant ses générateurs (et les entités qui s'en déduisent) lui conserve malgré tout sa structure d'algèbre de Lie. En outre, vu l'imprécision des mesures expérimentales, une variation infinitésimale des constantes de structure ne doit pas altérer le niveau dans lequel on se place.

Toutes ces considérations nous conduisent à l'étude des déformations de l'algèbre de Lie $G = H_4 \oplus SL(2,C)$; celles-ci permettant l'analyse locale de la variété algébrique, des algèbres de Lie de degré quinze, au voisinage du point représentant G, et la détermination de l'ensemble des algèbres de Lie qui se contractent en G, qui contient déjà, comme on l'a vu , l'algèbre conforme.

IV.2. Quelques résultats sur les variétés algébriques L_n

Soit L_n l'ensemble des algèbres de Lie de même degré n sur un corps k (=R ou C). Pour que les notions d'algèbre 'limite" et d'algèbre "voisine" acquièrent un sens rigoureux, susceptible d'interprétation physique, il est nécessaire que L_n soit préalablement muni d'une structure d'espace topologique en corrélation avec les conclusions physiques qu'on veut en tirer. Une telle approche s'est intégrée naturellement [5/ 6/] dans le cadre de la géométrie algébrique [7/ 8/], à la suite de l'article de Gerstenhaber qui a incité, par ailleurs, plusieurs auteurs à l'étude de différentes variétés de structure algébrique de type donné. L'objet de ce paragraphe est de reprendre certains résultats permettant de rendre plus transparentes les équations liées aux déformations et leur interprétation géométrique.

Soient k un corps commutatif et K sa clôture algébrique.

Définition IV.2.1.

Une variété algébrique définie sur k *est un sous-ensemble* A *de* K^n *associé à une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *de polynômes de* $k(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ *(l'anneau des polynômes à n indéterminées à coefficients dans* k*) tels que* A *soit l'ensemble des zéros communs aux polynômes de l'idéal* I *engendré par les* f_i.

La condition que doit satisfaire la famille $(f_i)_{i\in I}$ est équivalente à

si $x = (x_1,x_2,\ldots x_n)\in K^n$, alors $x\in A \Leftrightarrow \forall i \in I$, $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$.

Aussi $(f_i)_{i\in I}$ sont appelés polynômes de définition A et I l'idéal associé à A. A (resp. I) est noté $A(I)$ (resp. $I(A)$).

Il est évident que $A\{0\} = K^n$ et $A\{k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\} = \emptyset$. En outre toute intersection (ou union finie) de variétés algébriques est une variété algébrique, d'où la

Définition IV.2.2.

On appelle topologie de Zariski de K^n *(relativement à* k*) la topologie de* K^n *dont les ensembles fermés sont les variétés algébriques définies sur* k.

Si K = C, le fait que toute variété algébrique est fermée pour la topologie naturelle de C^n implique que la topologie de Zariski est moins fine que la topologie naturelle ; donc tout ouvert de Zariski est ouvert pour la topologie naturelle. En outre, si A est une partie quelconque de K^n; l'intérieur (resp. l'adhérence) de A pour la topologie de Zariski est contenu dans (resp. contient) l'intérieur (resp. l'adhérence) de A pour la topologie naturelle et si a est point limite (resp. adhérent) de la topologie naturelle, il est aussi point limite (resp. adhérent) pour la topologie de Zariski.

Définition IV.2.3.

Une variété algébrique A *est dite irréductible si elle est différente du vide et si elle ne peut s'écrire* $A = A_1 \cup A_2$ *où* A_1 *et* A_2 *sont deux variétés algébriques différentes de* A.

La notion d'irréductibilité s'étend à des sous-ensembles quelconques de K^n : un sous-ensemble B de K^n est dit irréductible s'il n'est pas réunion de deux fermés (pour la topologie induite), différents de B. L'irréductibilité d'un espace topologique quelconque se définit exactement de la même façon.

Remarques IV.2.1.

1/ De la définition IV.2.3. on déduit que toute variété algébrique irréductible est connexe ; la réciproque est fausse.

2/ Toutes ces notions sont étroitement liées au corps k, comme le montre l'exemple suivant : soit $K^n = C$; si $k^n = R$,{+i,-i} est une variété algébrique irréductible sur k ; mais si $k^n = C$, c'est une variété algébrique réductible, puisque {+i} et {-i} sont deux variétés algébriques sur C.

Proposition IV.2.1. [8/]

Soit A *une variété algébrique ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est irréductible*

(2) *Tout ouvert non vide de* A *est dense dans* A

(3) *Tout ouvert de* A *est connexe*

(4) $I(A)$ *est premier*

Il en découle que la topologie (induite) de Zariski d'une variété algébrique irréductible, non réduite à un point, n'est pas séparée.

Proposition IV.2.2. [8/]

Toute variété algébrique A *non vide est réunion d'un nombre fini de variétés algébriques irréductibles* $A_1,\ldots,A_p$ *sans relations d'inclusion (i.e.* $A_i \subset A_j \Rightarrow i=j$*), et d'une façon unique à une permutation près.*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps k. La donnée d'une base $(e_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ de V définit une bijection ψ de L (V × V,V) (ensemble des applications linéaires de V × V dans V) sur K^{n^3} par

$$\mu \in L(V \times V,V) \to (C_{ij}^{\ k}) \in k^{n^3} \quad , \text{ si } \mu(e_i,e_j) = C_{ij}^{\ k}\, e_k$$

où la sommation est implicite sur l'indice répété deux fois. Aussi, à partir de la base canonique de k^n, on obtient une bijection de L $(k^n \times k^n, k^n)$ sur k^{n^3}. En outre, pour que $\mu \in L(V \times V,V)$ définissent le crochet d'une algèbre de Lie A = (V,μ) d'espace sous-jacent V, il faut et il suffit qu'il vérifie, $\forall X,Y,Z \in V$

$$\mu(X,X) = 0$$

$$\mu(X,(Y,Z)) + \mu(Y,(Z,X)) + \mu(Z,(X,Y)) = 0$$

Ce qui se traduit sur la base (e_i) par les relations polynômiales

$$C_{ij}^{\ k} = - C_{ji}^{\ k} \quad , \ \forall i,j,k = 1,..,n \qquad (1)$$

$$C_{jk}^{\ \ell}\, C_{i\ell}^{\ q} + C_{ki}^{\ m}\, C_{jm}^{\ q} + C_{ij}^{\ p}\, C_{kp}^{\ q} = 0, \ \forall j,k,q=1,\ldots,n \qquad (2)$$

La relation (1) implique que L_n est un sous-ensemble de $k^{n^2(n-1)/2}$ quant à (2) elle montre que L_n est muni d'une structure de variété algébrique, définie sur k, qui s'identifie avec l'intersection d'un nombre fini d'hypersurfaces quadratiques dans k^{n^3}. De plus, L_n est invariant par GL(V) ; plus précisément, le groupe GL(V) opère sur L_n comme suit :

Soient $g \in GL(V)$ et $A = (V,\mu) \in L_n$, alors $g.A = (V,g.\mu)$ où

$$g.\mu(X,Y) = g\{\mu(g^{-1}X,g^{-1}Y)\}$$

Cette dernière relation se traduit sur les constantes de structure $C_{ij}^{k}(\mu)$, ramenées à la base (e_i) par :

$$C_{ij}^{k}(g.\mu) = (g^{-1})_{\ell}^{\ell}\ (g^{-1})_{j}^{h}\ g_{m}^{k}\ C_{\ell h}^{m}(\mu) \qquad (3)$$

Il s'ensuit une partition de L_n en orbites: L'orbite d'un point $A \in L_n$ étant constituéepar l'ensemble des algèbres de Lie isomorphes à A qu'on note O(A) ou O(μ).

A la base $(e_i)_{i=1,..,n}$ de V va correspondre la base canonique $(E_{ij})_{i,j=1,...,n}$ de End V l'espace vectoriel des endomorphismes de V); tout élément $s \in$ End V sa se mettre sous la forme $s = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s)\ E_{ij}$ et l'algèbre des fonctions polynômes sur End V peut être considérée comme l'algèbre des polynômes en a_{ij} ; ce qui va nous permettre d'adapter les définitions précédentes à la structure de groupe [7/] en considérant End V ($\sim k^{n^2}$) au lieu de k^n.

Définition IV.2.4.

Soit G *un sous-groupe de* GL(V). *S'il existe un ensemble* S *de fonctions polynômes sur End* V *tel que* G *soit composé de tous les automorphismes* s *de* V *tels que* P(s) = 0 *pour tout* P ∈ S, *on dit que* G *est un groupe algébrique (d'automorphismes), et que* S *est un ensemble de définition de* G.

Les notions d'idéal associé et d'irréductibilité s'étendent naturellement aux groupes algébriques :

- l'idéal formé des fonctions polynômes qui s'annulent sur un groupe algébrique G est appelé idéal associé à G.
- un groupe algébrique est appelé irréductible si son idéal associé est premier.

Quant à la proposition (de décomposition) IV.2.2., elle prend ici la forme suivante :

Proposition IV.2.3. [7]

Soit G *un groupe algébrique de l'espace vectoriel* V. *Il existe alors un sous-groupe algébrique* G_1 *de* G *et un seul qui est irréductible et d'indice fini dans* G . G_1 , *qui est un sous-groupe invariant de* G, *est appelé composante algébrique de l'élément neutre dans* G *et les classes de* G *suivant* G_1 *s'appellent les composantes algébriques de* G.

Remarque IV.2.1.

1/ Si k = R ou C, G_1 contient G_o (la composante connexe G_o de l'élément neutre dans G au sens de la topologie naturelle de l'espace vectoriel End V).

2/ Si k = R, on peut avoir $G_1 \neq G_o$. C'est ce qui arrive si G = GL(V), puisque l'idéal associé de GL(V) est l'idéal nul, qui est premier, d'où G_1 = G. Par ailleurs, on sait que G_o est le groupe des automorphismes de déterminants > 0. En outre, le fait que G_1 est toujours connexe pour la topologie de Zariski implique que l'application déterminant n'est pas continue si G (resp. k) est muni de la topologie de Zariski (resp. sa topologie naturelle).

3/ Par contre, on peut montrer que, si k = C, on a toujours $G_o = G_1$.

L'association de la structure de variété algébrique de L_n à celle de groupe algébrique (irréductible) de GL(V) conduit à la

Proposition IV.2.4.

Dans L_n toute orbite est un sous-ensemble irréductible et toute composante irréductible est une réunion d'orbites.

Démonstration :

Soit $O(A)$ l'orbite de $A = (V,\mu)$. Par définition $O(A)$ est l'image de l'ensemble irréductible (en tant que produit de deux ensembles irréductibles) $GL(V) \times \{\mu\}$ par l'application $(g,\mu) \to g.\mu$ qui, d'après la relation (3), est une application rationnelle des g_m^k, donc continue pour les topologies de Zariski, il s'ensuit que $O(A)$ est également irréductible.

De même, si C est une composante irréductible de L_n, le sous-ensemble $D = \bigcup_{A \in C} O(A)$ (qui contient C) est un ensemble irréductible en tant qu'image continue de l'ensemble irréductible $GL(V) \times C$, ce qui implique $D = O(A)$.

Proposition IV.2.5.

Le sous-ensemble de L_n constitué par les algèbres de Lie semi-simples (resp. non semi-simples) est un ouvert (resp. fermé) de L_n.

Démonstration

En effet, d'après le critère de Cartan, pour qu'une algèbre de Lie, sur un corps de caractéristique zéro, soit semi-simple, il faut et il suffit que sa forme de Killing ($K(X,Y) = \text{Trace ad}X \text{ ad}Y$) soit non dégénérée, ce qui équivaut à $\det.(C_{ji}^{\ell} C_{\ell m}^{i}) \neq 0$; d'où le résultat désiré.

Il est à remarquer qu'un résultat analogue est obtenu chaque fois qu'on annule d'autres polynômes, outre ceux de définition (1)(2) de L_n.

Remarques IV.2.2.

1/ Si l'on considère la topologie induite par la topologie naturelle de k^N, pour $k = C$ le groupe $GL(V)$ est connexe, ce qui implique que les orbites le sont également, en tant qu'image d'un ensemble connexe par une application continue ; si $k = R$, elles ne le sont pas nécessairement ($GL(V)$ ayant deux composantes connexes).

2/ Il serait plus naturel de considérer, au lieu de la variété algébrique L_n, l'ensemble $L_n/GL(V)$ constitué par les orbites. Malheureusement ce dernier ne possède pas de structure algébrique simple ; en particulier, la structure de variété algébrique de L_n ne passe pas au quotient.

3/ Soit G_μ le stabilisateur de $A = (V,\mu)$ dans $GL(V)$. L'application $g \to g.\mu$ de $GL(V)$ sur $O(\mu)$ se factorise en

$$GL(V) \xrightarrow{f} GL(V)/G_\mu \xrightarrow{\varphi} O(\mu)$$

où $GL(V)/G_\mu$ est l'ensemble de classes à gauche $g\,G_\mu$ suivant le sous-groupe G_μ, f l'application canonique $g \to g\,G_\mu$ et φ la bijection $g\,G_\mu \to g.\mu$.

4/ Il ressort, à partir de travaux récents, qu'une théorie complète de classification des déformations et des contractions d'une algèbre de Lie donnée est nécessairement dépendante de ses propriétés structurales ("degrés" de semi-simplicité et de nilpotence,...algèbre des dérivations, idéaux caractéristiques, groupes de cohomologie...) et de la connaissance de la "zoologie" de L_n (ses orbites, ses fermés, sa réductibilité...) ; malheureusement on ne dispose, à l'heure actuelle, que de quelques résultats fragmentaires dans ce domaine.

IV.3. Les G-modules $H^n(G,G)$ $(n = 0,1,2,3)$

Soient $Z(SL(2,C))$ (resp. $Z(G)$) le centralisateur de $SL(2,C)$ dans G (resp. le centre de G), Der G (resp. Ad G) l'algèbre des dérivations (resp. L'idéal des dérivations intérieures) de G.

Proposition IV.3.1.

(1) $G = H_4 \oplus SL(2,C)$ *est une décomposition de Levi de* G

(2) $Z(SL(2,C))$ *et* $Z(G)$ *sont unidimensionnels et engendrés par* D

(3) dim Der $G \geq$ dim G

Démonstration

(1) H_4 est un idéal nilpotent de G, il est donc résoluble. L'algèbre de Lie quotient G/H_4 est isomorphe à $SL(2,C)$ qui est simple (sur R et semi-simple sur C), donc semi-simple. Or le radical R d'une algèbre de Lie G sur un corps de caractéristique zéro est le seul idéal résoluble R tel que G/R soit semi-simple [9]. Il s'ensuit que : H_4 est le radical de G, $G = H_4 \oplus SL(2,C)$ en est une décomposition de Levi et $SL(2,C)$ en est une sous-algèbre semi-simple maximale.

Remarque IV.3.1.

Si l'on désigne par N (resp. S,T) le plus grand idéal nilpotent (resp. le radical nilpotent, l'orthogonal de G pour la forme de Killing), on a $H_4 = N = S = T$; En effet, on sait que $H_4 \supset T \supset N \supset S = [H_4,G]$ or $[H_4,G] = H_4$, d'où le résultat cherché. En outre, H_4 (étant un idéal caractéristique) est stable pour tout élément de Der G.

(2) Tout d'abord $Z(SL(2,C))$ (qui contient évidemment $Z(G)$) est contenu dans H_4 ; ceci résulte du fait que si $A = R \oplus S$ est une décom-

position de Levi d'une algèbre de Lie A, alors :

$$Z(S) = \{X \in A \text{ tel que } (X,Y) = 0 \quad \forall Y \in S\} \subset R .$$

Donc si $X \in Z(SL(2,C))$, $X = \lambda_\alpha P^\alpha + \mu_\alpha Q^\alpha + \gamma D$. Si l'on pose

$$A_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \quad ; \quad B_i = M^{io}$$

$(A_i,X) = 0$ entraîne $\lambda_i = \mu_i = 0$

$(B_i,X) = 0$ entraîne $\lambda_o = \mu_o = 0$

Ce qui implique que $Z(SL(2,C))$ est égal au centre $Z(H_4)$ de H_4.

(3) Soit V le sous-espace vectoriel de H_4 engendré par (P^α,Q^β); H_4 se décompose en

$H_4 = V \oplus Z(H_4) = V \oplus (V,V)$ (somme directe d'espace vectoriel)

donc H_4 est une algèbre de Lie nilpotente quasi-cyclique *. Or, [10] si le plus grand idéal nilpotent d'une algèbre de Lie A de centre non trivial est quasi-cyclique, alors Der $A \neq$ Ad A. En outre $G/Z(G) \sim$ Ad G entraîne dim AdG = dim G - dim $Z(G)$, d'où dim Der$G \geq$ dim AdG + 1 = dim G , puisque dim $Z(G) = 1$

Si l'on considère G comme un G-module pour la représentation adjointe, les espaces de cohomologie relative à $SL(2,C)$ sont définis par :

---

* Une algèbre de Lie nilpotente A est dite quasi-cyclique [10] si elle admet un sous-espace vectoriel V tel que :

1/ $A = V \oplus (A,A)$

2/ $A = V \oplus V^2 \oplus \ldots \oplus V^k$, où $V^i = (V^{i-1},V)$.

$\mathcal{C}^n(H_4,G)^G = \{f \in \mathcal{C}^n(G,G)$ tel que : 1/ $f(X_1,..,X_o) = 0$ si l'un des arguments X_i est dans $SL(2,C)$

2/ $d_X f = 0 \quad \forall X \in G\}$

$Z^n(H_4,G)^G = Z^n(G,G) \cap \mathcal{C}^n(H_4,G)^G$

$B^n(H_4,G)^G = \delta\mathcal{C}^{n-1}(H_4,G)^G$; $B^o(H_4,G)^G = \{0\}$

le n-ième groupe de cohomologie relative à $SL(2,C)$ est donc

$H^n(H_4,G)^G = Z^n(H_4,G)^G / B^n(H_4,G)G$.

Lemme IV.3.1.

Les G-modules $H^1(G,G)$ (resp. $H^2(G,G)$, $H^3(G,G)$) et $H^1(H_4,G)^G$ (resp. $H^2(H_4,G)^G$, $H^3(H_4,G)^G + H^3(SL(2,C),R)$) sont isomorphes.

Démonstration :

Pour tout $n \in N$, on obtient, à partir du théorème de Hochschild-Serre [11/] , l'isomorphisme (de G-module) suivant :

$$H^n(G,G) \sim \sum_{i+j=n} H^i(SL(2,C),R) \otimes H^i(H_4,G)^G$$

Or, $SL(2,C)$ étant semi-simple, les lemmes de Whitehead [12/] impliquent $H^n(SL(2,C),R) = R$ si $n = 0$ et $\{0\}$ si $n = 1,2$. En outre $H^o(G,G) \sim Z(G) \sim R$. Ce qui entraîne

$H^o(G,G) \sim R \otimes H^o(H_4,G)^G \sim Z(G)$

$H^1(G,G) \sim R \otimes H^1(H_4,G)^G \sim H^1(H_4,G)^G$

$H^2(G,G) \sim R \otimes H^2(H_4,G)^G \sim H^2(H_4,G)^G$

$H^3(G,G) \sim R \otimes H^3(H_4,G)^G + H^3(SL(2,C),R) \otimes H^o(H_4,G)^G$

$\sim H^3(H_4,G)^G + H^3(SL(2,C),R)$.

Ce lemme implique en particulier que chaque classe de cohomologie de $Z^i(G,G)$ $(i = 1,2)$ peut être représentée par un élément $f_i \in Z^i(H_4,G)^G$.

Lemme IV.3.2.

La dimension du G-module $H^3(G,G)$ est nécessairement plus grande que l'unité.

Démonstration :

Il suffit de montrer que l'un des deux G-modules qui constituent la décomposition de $H^3(G,G)$ possède la propriété. En effet $SL(2,C)$ étant l'algèbre de Lie d'un groupe simple réel non compact dont l'extension complexe n'est pas simple, dim $H^3(SL(2,C),R) > 1$, d'après un résultat de [13].

Lemme IV.3.3.

(a) Tout élément $\phi \in Z^1(H_4,G)^G$ peut être paramétré par :

$$\phi(P^\alpha) = a\,P^\alpha + b\,Q^\alpha$$

$$\phi(Q^\alpha) = a'P^\alpha + b'Q^\alpha$$

$$\phi(D) = (a+b')D$$

(b) L'espace $B^1(H_4,G)^G$ est trivial.

Démonstration :

Les espaces de la cohomologie relative sont définis, pour n = 1, par

$$C^1(H_4,G)^G = \{\phi \in C^1(G,G) \text{ telle que : } \phi(s) = 0 \quad \forall s \in SL(2,C) \ ;$$
$$(s, \phi(h)) = \phi((s,h)) \quad \forall (\, s \in SL(2,C),\ h \in H_4)\}$$

$Z^1(H_4,G)^G = \{\phi \in C^1(H_4,G)^G$ telle que :

$$(h_1,\phi(h_2)) + (\phi(h_1),h_2) - \phi((h_1,h_2)) = 0 \quad \forall h_1,h_2 \in H_4\}$$

$B^1(H_4,G)^G = \{\phi \in C^1(H_4,G)^G$ telle qu'il existe $g_1 \in G$ vérifiant :

$$\phi(g_2) = (g_1,g_2) \quad \forall g_2 \in G\}$$

(a) Soit $\phi \in Z^1(H_4,G)^G$. ϕ étant une dérivation, elle laisse stable H_4.

Explicitons la relation $(s,\phi(h)) = \phi((s,h))$

1/ $h = D$; $\phi(D) = \lambda D$, puisque $Z(SL(2,C)) = Z(G)$

2/ $h = P^\alpha$, posons

$$\phi(P^\alpha) = x^\alpha_\beta P^\beta + y^\alpha_\beta Q^\beta + z^\alpha D$$

$\alpha)$ $s = A_i$ implique $\begin{cases} \phi(P^\circ) = x^\circ P^\circ + y^\circ Q^\circ + z^\circ D \\ \phi(P^\ell) = x^\ell P^\ell + y^\ell Q^\ell \end{cases}$

$\beta)$ $s = B_i$ implique : $z^\circ = 0$ et $x^\circ = x^\ell$, $y^\circ = y^\ell$

3/ $h = Q^\alpha$, posons

$$\phi(Q^\alpha) = x'^\alpha_\beta P^\beta + y'^\alpha_\beta Q^\beta + z'^\alpha D$$

$\alpha)$ $s = A_i$ implique $\begin{cases} \phi(Q^\circ) = x'^\circ P^\circ + y'^\circ Q^\circ + z'^\circ D \\ \phi(Q^\ell) = x'^\ell P^\ell + y'^\ell Q^\ell \end{cases}$

$\beta)$ $s = B_i$ implique : $z'^\circ = 0$, $x'^\circ = x'^\ell$, $y'^\circ = y'^\ell$

Finalement, on obtient :

$\phi(P^\alpha) = a P^\alpha + b Q^\alpha$

$\phi(Q^\alpha) = a'P^\alpha + b' Q^\alpha$, où l'on a posé : $x^\circ = x^\ell = a$, $y^\circ = y^\ell = b$

$\phi(D) = \lambda D$ $\qquad$ $x'^\circ = x'^\ell = a'$, $y'^\circ = y'^\ell = b'$

ϕ (étant une dérivation) vérifie en plus la relation

$$\left(h_1, \phi(h_2)\right) + \left(\phi(h_1), h_2\right) - \phi\left(\left(h_1, h_2\right)\right) = 0 \qquad \forall h_1, h_2 \in H_4$$

qui introduit l'unique contrainte $\lambda = a + b'$ correspondant aux valeurs $h_1 = P^{\alpha}$ et $h_2 = Q^{\beta}$.

(b) Si $\phi \in B^1(H_4, G)^G$

$\phi(g_2) = \left(g_1, g_2\right) \quad \forall g_2 \in G$, en particulier

$\phi(s) = \left(g_1, s\right) \quad \forall s \in SL(2,C)$, autrement dit, puisque ϕ est nulle sur $SL(2,C)$, $g_1 \in Z(SL(2,C))$ c'est à dire $g_1 = \varepsilon D$;

d'où $\phi \equiv 0$.

Les lemmes IV.3.1. et IV.3.3. conduisent au

Théorème IV.3.1.

L'espace $H^1(G,G)$ est quadridimensionnel.

Remarque IV.3.2.

Comme $Z^1(G,G)$ (resp. $B^1(G,G)$) s'identifie à l'espace vectoriel des dérivations (resp. des dérivations intérieures) de G , $H^1(G,G)$ est isomorphe à Out G = Der G /AdG . Ce résultat est essentiel dans l'étude des extensions $G \overset{\lambda}{\to} A \overset{\mu}{\to} \mathcal{B}$ (suite exacte) d'une algèbre de Lie $\mathcal{B}$ par l'algèbre de Lie G [9], étant donné qu'une telle extension définit un homomorphisme φ de $\mathcal{B}$ dans Out G (noyau$(\mathcal{B}, \varphi, G)$) : Si $b \in \mathcal{B}$, on lui associe la classe, module Ad $\lambda(G)$, de la restriction à $\lambda(G)$ de la dérivation $\mathrm{Ad}_A\, g$ où g est un élément quelconque appartenant à $\mu^{-1}(b)$.

Lemme IV.3.4.

(a) Tout élément $\psi \in Z^2(H_4, G)^G$ peut être paramétré par :

$$\psi(P^i,P^j) = -\varepsilon^{ijk}\, y\, A_k \qquad ; \psi(Q^i,Q^j) = -\varepsilon^{ijk}\, y'\, A_k$$

$$\psi(P^o,P^j) = y\, B_j \qquad ; \psi(Q^o,Q^j) = y'\, B_j$$

$$\psi(P^\alpha,D) = -v\, P^\alpha - y\, Q^\alpha \qquad ; \psi(Q^\alpha,D) = y'\, P^\alpha + v\, Q^\alpha$$

$$\psi(P^o,Q^o) = 0 \qquad ; \psi(P^j,Q^o) = \psi(Q^j,P^o) = v\, B_j$$

$$\psi(Q^j,P^i) = \varepsilon^{ijk}\, v\, A_k$$

(b) L'espace $B^2(H_4,G)^G$ est trivial.

Démonstration :

Les espaces de la cohomologie relative sont définis, pour n = 2, par

$$C^2(H_4,G)^G = \{\psi \in C^2(G,G) \text{ telle que : } \psi(s_1,s_2) = \psi(s,h) = 0$$

$$\forall (s_1,s_2,s \in SL(2,C),\ h \in H_4)\ ;$$

$$(s,\psi(h_1,h_2)) - \psi((s,h_1),h_2) - \psi((h_2,s),h_1) = 0$$

$$\forall (s \in SL(2,C)\ ;\ h_1,h_2 \in H_4)\}$$

$$Z^2(H_4,G)^G = \{\psi \in C^2(H_4,G)^G \text{ telle que :}$$

$$\sum_{P(h_1,h_2,h_3)} (h_1,\psi(h_2,h_3)) - \sum_{P(h_1,h_2,h_3)} \psi((h_1,h_2),h_3) = 0$$

$$\forall h_1,h_2,h_3 \in H_4 \text{ et } P(h_1,h_2,h_3) = \text{permutation circulaire sur } h_1,h_2,h_3\}$$

$$B^2(H_4,G)^G = \{\psi \in C^2(H_4,G)^G \text{ telle qu'il existe } \phi : H_4 \to G$$

$$\text{vérifiant } \psi(h_1,h_2) = (h_1,\phi(h_2)) - (h_2,\phi(h_1)) - \phi((h_1,h_2))$$

$$\forall h_1,h_2 \in H_4\ \}$$

(a) Soit $\psi \in C^2(H_4,G)^G$ et considérons la relation de définition

$$(s,\psi(h_1,h_2)) - \psi((s,h_1),h_2) - \psi((h_2,s),h_1) = 0$$

1/ $h_1 = P^\alpha$; $h_2 = P^\beta$

$$\psi(P^\alpha,P^\beta) = x^{\alpha\beta\ell} A_\ell + y^{\alpha\beta\ell} B_\ell + z^{\alpha\beta}_\gamma P^\gamma + t^{\alpha\beta}_\gamma Q^\gamma + u^{\alpha\beta} D$$

α) $s = A_i$ implique $z^{ko}_o = t^{ko}_o = u^{ko} = 0$

$$x^{101} = x^{202} = x^{303} ; x^{poj} = 0$$

ce qui donne

$$\psi(P^o,P^j) = x^o A_j + y^o B_j + z^o P^j + t^o Q^j$$

β) $s = B_i$ implique $z^{ij}_k = t^{ij}_k = u^{ij} = 0$

$$z^{ij}_o = z^o = t^{ij}_o = t^o = 0$$

ce qui donne

$$\psi(P^i,P^j) = \varepsilon^{ijk}(-y A_k + x B_k)$$

$$\psi(P^o,P^j) = x A_j + y B_j$$

2/ $h_1 = Q^\alpha$; $h_2 = Q^\beta$, on obtient

$$\psi(Q^i,Q^j) = \varepsilon^{ijk}(- y' A_k + x' B_k)$$

$$\psi(Q^o,Q^j) = x' A_j + y' b_j$$

3/ $h_1 = P^\alpha$ ou Q^α , $h_2 = D$, conduit à

$$\psi(P^\alpha,D) = z_1 P^\alpha + t_1 Q^\alpha$$

$$\psi(Q^\alpha,D) = z'_1 P^\alpha + t'_1 Q^\alpha$$

4/ $h_1 = P^\alpha$; $h_2 = Q^\beta$ entraîne

$$\psi(P^o,Q^o) = 0$$

$$\psi(P^j,Q^o) = u A_j + v B_j$$

$$\psi(Q^j,P^o) = u A_j + v B_j$$

$$\psi(Q^j,P^i) = \varepsilon^{jik}(v A_k - u B_k)$$

Si l'on suppose que $\psi \in Z^2(H_4,G)^G$, la relation de définition

$$\sum_{P(h_1,h_2,h_3)} (h_1\psi,(h_2,h_3)) - \sum_{P(h_1,h_2,h_3)} \psi((h_1,h_2),h_3) = 0 \text{ conduit à}$$

$$x = u = x' = 0 \quad ; \; y = -t_1 \; ; \; v = -z_1 \; ; \; y' = z'_1 \; ; \; v = t'_1$$

(b) Soit ψ un élément de $Z^2(H_4,G)^G$ de paramètres (y,y',v). Supposons que $\psi \in B^2(H_4,G)^G$ et soit φ l'application de H_4 dans G associée :

$$\psi(P^i,P^j) = (P^i,\varphi(P^j)) - (P^j,\varphi(P^i)) \quad \text{implique} \quad y = 0$$
$$\psi(Q^i,Q^j) = (Q^i,\varphi(Q^j)) - (Q^j,\varphi(Q^i)) \quad \text{implique} \quad y' = 0$$
$$\psi(P^j,Q^\circ) = (P^j,\varphi(Q^\circ)) - (Q^\circ,\varphi(P^j)) \quad \text{implique} \quad v = 0$$

autrement dit $B^2(H_4,G)^G \equiv \{0\}$

Des lemmes IV.3.1. et IV.3.4. on déduit le

Théorème IV.3.2.

Le G-module $H^2(G,G)$ est tridimensionnel.

IV.4. Déformations de l'algèbre de Lie G

Soient $A = (V,\mu)$ une algèbre de Lie et μ' une application bilinéaire et alternée de $V \times V \to V$; $\varphi = \mu' - \mu$ est également une application bilinéaire et alternée. μ' définirait un crochet de Lie sur V si elle vérifiait l'identité de Jacobi :

$$0 = \sum_{P(x,y,z)} \mu'(x,\mu'(y,z)) \quad , \quad \forall x,y,z \in V$$

$$= \sum_{P(x,y,z)} (\mu+\varphi)(x,(\mu+\varphi)(y,z))$$

$$= \sum_{P(x,y,z)} \mu(x,\mu(y,z)) + \sum_{P(x,y,z)} \mu(x,\varphi(y,z)) + \sum_{P(x,y,z)} \varphi(x,\mu(y,z)) + \sum_{P(x,y,z)} \varphi(x,\varphi(y,z))$$

Cette relation s'écrit simplement

$$\delta_2 \varphi(x,y,z) + \sum_{P(x,y,z)} \varphi(\varphi(x,y),z) = 0 \qquad (d)$$

où $\delta_2\varphi$ est le cobord de la 2-cochaîne φ, compte-tenu de l'hypothèse que μ est un crochet de Lie.

Dans ces conditions, on dit que φ (ou $A' = (V, \mu + \varphi)$ est une déformation * de l'algèbre de Lie $A = (V,\mu)$ et l'équation (d) est appelée l'équation de déformation de structure d'algèbre de Lie (elle est formellement la même que celle de déformation des autres structures algébriques qui ont été considérées). En conséquence, la détermination de toutes les déformations d'une algèbre de Lie donnée revient à la résolution de l'équation (d).

Formulé ainsi, le problème est hautement indéterminé. Aussi, la démarche habituelle de l'étude de l'équation de déformation consiste à considérer φ sous forme d'une série $\varphi_t = t\,\varphi_1 + t^2\,\varphi_2 + \ldots$, où les φ_p sont des 2-cochaînes, telle que l'algèbre de Lie déformée $(V, \mu + \varphi_t)$ soit voisine de l'algèbre de Lie initiale (V,μ). Les conditions que doivent satisfaire les φ_p (et qui se déduisent de l'équation (d)) sont appelées les conditions d'intégrabilité. On doit avoir en particulier au premier ordre $\delta_2\,\varphi_1 = 0$, c'est à dire que φ_1 doit être un 2-cocycle pour l'algèbre initiale. Plus généralement, un 2-cocycle φ_1 est dit intégrable s'il existe une suite $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \in Z^2(\mu,\mu)$ telle que $\varphi_t = t\,\varphi_1 + t^2\,\varphi_2 + \ldots$ soit une déformation de μ et une déformation qui est un 2-cocycle est appelée déformation infinitésimale. L'ensemble des cocycles intégrables est

---

* Pour un exposé et une bibliographie sur les déformations, cf [14]

noté $Z^{2\ int}(\mu,\mu)$; il contient $B^2(\mu,\mu)$. L'ensemble des cocycles intégrables modulo les cobords est désigné par $H^{2\ int}(\mu,\mu)$. Une condition suffisante pour que $Z^{2\ int}(\mu,\mu)$ s'identifie à $Z^2(\mu,\mu)$ tout entier est que $H^3(\mu,\mu) = \{0\}$.[6/]

Dans ces conditions une déformation d'une algèbre de Lie μ s'interprète comme un chemin (sur la variété L_n) issu du point μ et contenu dans un voisinage de μ, l'élément φ_1 correspond au vecteur tangent au chemin ; si φ_1 est un 2-cobord, le chemin associé est contenu dans l'orbite de μ (et réciproquement) et $(V, \mu + \varphi_t)$ (qui est isomorphe à (V,μ)) est appelée une déformation triviale ; aussi les déformations isomorphes à l'algèbre de Lie initiale sont décrites au moyen de $B^2(\mu,\mu)$. Une algèbre de Lie est dite rigide si toutes ses déformations sont triviales. Une condition suffisante (et non nécessaire, cf. contre exemple dans [15/]) de rigidité d'une algèbre de Lie μ est que $H^2(\mu,\mu) = \{0\}$. Il s'ensuit en particulier qu'une algèbre de Lie semi-simple est rigide. En outre, si $M = \{\mu \in L_n$ tel que $H^2(\mu,\mu) = 0\}$, alors M est un sous-ensemble ouvert de L_n ; de plus si $k = C$, le groupe $GL(V)$ n'admet qu'un nombre fini d'orbites sur M. Plus généralement, une algèbre de Lie est rigide si son orbite est un ouvert de L_n et les ouverts de L_n sont stables par déformation.

Sous sa forme la plus générale, le problème de la classification de toutes les déformations d'une algèbre de Lie donnée n'a pas encore reçu de solution. En conséquence, pour ce qui nous concerne, nous allons procéder par déformations successives linéaires en t, c'est à dire déterminer toutes les déformations au premier ordre $(\mu_t = \mu + t\varphi)$ de $H_4 \oplus SL(2,C)$ et réitérer le procédé sur les algèbres de Lie déformées

ainsi obtenues. La question qui se pose est de savoir si nous épuisons de cette façon toutes les déformations et plus particulièrement si une déformation à un ordre donné peut être obtenue par un tel schéma ; bien que cela semble plausible pour l'algèbre de Lie $H_4 \oplus SL(2,C)$, la réponse à une telle question ne serait pas affirmative dans le cas général.

Lemme IV.4.1.

$H^{2\ int}(G,G)$ est l'espace $H^2(G,G)$ tout entier.

Démonstration :

D'après les lemmes IV.3.1. et IV.3.4., nous pouvons nous restreindre, sans perte de généralité, aux déformations qui gardent invariant tout commutateur faisant intervenir au moins un élément de $SL(2,C)$.

Si l'on désigne par $(\ ,\ )_t$ le crochet de l'algèbre déformée G_t, on a nécessairement

$$(h_1,h_2)_t = (h_1,h_2) + t\,\psi(h_1,h_2) \qquad \forall h_1,h_2 \in H_4$$

où ψ est un élément de $H^2(G,G)$.

Les conditions d'intégrabilité se réduisent à la relation

$$\sum_{P(h_1,h_2,h_3)} \psi(\psi(h_1,h_2),h_3) = 0 \qquad \forall h_1,h_2,h_3 \in H_4$$

qui est toujours satisfaite.

Ainsi tout cocycle est intégrable, bien que $H^3(G,G) \neq \{0\}$.

Remarque IV.4.1.

Le fait, que tout commutateur faisant intervenir au moins un élément de $SL(2,C)$ est le même pour G et G_t , peut également se

déduire du théorème de Page-Richardson [16] sur la stabilité des sous-algèbres dans les déformations.

S est une sous-algèbre stable de l'algèbre de Lie $A = (V,\mu)$ si pour tout voisinage W de l'élément neutre dans $GL(V)$ il existe un voisinage W' de A dans L_n tel que tout $A' = (V,\mu') \in W'$ il corresponde un élément $g \in W$ vérifiant la condition suivante : la restriction de $g \in S$ est un isomorphisme de S sur une sous-algèbre S' de A'. Dans ces conditions S conserve sa structure d'algèbre de Lie sous de petites déformations de A. Si A est une algèbre de Lie (réelle ou complexe), une condition suffisante pour qu'une sous-algèbre S soit stable est que $H^2(S,V) = \{0\}$. Il s'ensuit que si S est semi-simple, elle est stable, en outre si V est un sous-espace vectoriel complémentaire de S dans A, toute petite déformation de A n'altère (à un isomorphisme près) que les commutateurs des éléments de V. En conséquence, pour de telles déformations, le radical de l'algèbre initiale ne peut que diminuer.

Théorème IV.4.1.

Toute déformation au premier ordre de l'algèbre de Lie G est définie par :

$$(P^i,P^j)_t = -\varepsilon^{ijk}\, t\, y\, A_k \qquad ; \quad (Q^i,Q^j)_t = -\varepsilon^{ijk}\, t\, y'\, A_k$$

$$(P^o,P^j)_t = t\, y\, B_j \qquad ; \quad (Q^o,Q^j)_t = t\, y'\, B_j$$

$$(P^\alpha,D)_t = -t\, v\, P^\alpha - t\, y\, Q^\alpha \qquad ; \quad (Q^\alpha,D)_t = t\, y'\, P^\alpha + t\, v\, Q^\alpha$$

$$(P^\alpha,Q^\beta)_t = g^{\alpha\beta}\, D + t\, v\, M^{\alpha\beta}$$

les autres relations étant les mêmes que celles de G et (y,y',v) désignant les paramètres de l'élément ψ de $H^{2\ int}(G,G)$ qui définit la déformation $G_t(y,y',v)$.

Démonstration

Elle découle des relations de commutation de G et des lemmes IV.3.4. et IV.4.1.

Corollaire IV.4.1.

$G_t(y,y',v)$ est isomorphe à

(a) $SO(3,3) = SL(4,R)$ si (ty et ty' > 0 et v = 0)

(b) $SO(4,2) = SU(2,2)$ si (v = 0 et yy' < 0) ou bien (v ≠ 0 et y = y' = 0)

(c) $SO(5,1) = SU^*(4)$ si (ty et ty' < 0 et v = 0)

(d) I $SO(3,2)$ si (ty > 0 et v = y' = 0) ou bien (ty' > 0 et v = y = 0)

(e) I $SO(4,1)$ si (ty < 0 et v = y' = 0) ou bien (ty' < 0 et v = y = 0)

Démonstration

1/ les relations de commutation des algèbres de Lie semi-simples non compactes $SO(p,q)$, $p + q = 6$ et $pq \neq 0$, peuvent s'écrire

$$(M^{ab}, M^{ac}) = - g^{aa} M^{bc} \quad , \quad a,b = 0,1,2,3,5,6 \qquad , \qquad (1)$$

où g^{aa} est le tenseur métrique diagonal dont la signature est $(+,-,-,-,+,+)$ {resp; $(+,-,-,-,-,+)$; $(+,-,-,-,-,-)$} pour $SO(3,3)$ {resp. $SO(4,2)$; $SO(5,1)$} . En outre [17] $SO(3,3)$ {resp. $SO(5,1)$} est isomorphe à $SL(4,R)$ {resp. $SU^*(4)$}; où $SU^*(4)$ est l'algèbre de Lie du groupe $SU^*(4)$: le sous-groupe de $SL(4,C)$ constitué par les transformations qui commutent avec l'application

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) \to (\bar{z}_3,\bar{z}_4,-\bar{z}_1,-\bar{z}_2)$$

autrement dit $SU^*(4) = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Tr}\, Z_1 + \mathrm{Tr}\, \bar{Z}_1 = 0$

Si l'on pose :

$M^{ab} = M_1^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 0,1,2,3)$; $M^{5\alpha} = P_1{}^{\alpha}$; $M^{6\alpha} = Q_1^{\alpha}$; $M^{65} = D_1$

Les relations (1) se transforment en

$$(P_1^i , P_1^j) = - g^{55} M^{ij} \qquad ; \quad (Q_1^i , Q_1^j) = - g^{66} M_1^{ij}$$

$$(P_1^o , P_1^j) = g^{55} M^{jo} \qquad ; \quad (Q_1^o , Q_1^j) = g^{66} M_1^{jo}$$

$$(P_1^\alpha , D_1) = - g^{55} Q_1^\alpha \qquad ; \quad (Q_1^\alpha , D_1) = g^{66} P_1^\alpha$$

$$(P_1^\alpha , Q_1^\beta) = g^{\alpha\beta} D_1$$

qui sont identiques à celles du théorème précédent avec

$$ty = g^{55} , \; ty' = g^{66} \; ; \; v = 0$$

On obtient ainsi tous les cas du corollaire pour lesquels $v = 0$ et $yy' \neq 0$.

2/ Le deuxième cas du (b) est obtenu par le changement de base suivant dans l'algèbre conforme.

$$P_1^\alpha = - (1/2) \sqrt{|tv|} \; A^\alpha \; ; \; Q_1 = - \sqrt{|tv|} \; P^\alpha \; ; \; D_1 = tv \; D$$

3/ Les relations de commutation des deux algèbres inhomogènes de de Sitter peuvent s'écrire

$$(M^{ab}, M^{ac}) = - g^{aa} M^{bc}$$

$$(M^{ab}, L^a) = - g^{aa} L^b \qquad a,b,c, = 0,1,2,3,5$$

où la signature de g^{aa} est +---- (resp. +---+) pour $I\,SO(4,1)$ (resp. $I\,SO(3,2)$). Si l'on pose

$$M^{ab} = M_1^{\alpha\beta} \; (\alpha,\beta = 0,1,2,3) \; ; \; M^{5\alpha} = P_1^\alpha \; ; \; L^\alpha = Q_1^\alpha \; ; \; L^5 = D_1$$

on obtient

$$(P_1^i , P_1^j) = - g^{55} M_1^{ij}$$

$$(P_1^o , P_1^j) = g^{55} M^{jo}$$

$$(P_1^\alpha , D_1) = - g^{55} Q_1^\alpha$$

$$(P_1^\alpha , Q_1^\beta) = \quad {}^{\alpha\beta} L_1$$

$$(Q_1^\alpha , Q_1^\beta) = (Q_1^\alpha , D_1) =$$

ce qui correspond aux cas (d) et (e) avec $g^{55} = ty \neq 0$.

Enfin, le changement de base

$$M^{ab} = M_1^{\alpha\beta} \ (\alpha,\beta = 0,1,2,3) \ ; \ M^{5\alpha} = Q_1^{\alpha} \ ; \ L^{\alpha} = P_1^{\alpha} \ ; \ L^5 = - D_1$$

conduit aux cas (d) et (e) avec $g^{55} = ty' \neq 0$

Théorème IV.4.2.

Toute déformation au premier ordre de l'algèbre de Lie $H_4 \oplus SL(2,C)$ est isomorphe ou bien à une forme réelle non compacte de l'algèbre de Lie complexe $A_3 = \mathcal{D}_3$ ou bien à l'une des deux algèbres inhomogènes de de Sitter.

Démonstration :

Soient $G_t(y,y',v)$ une telle déformation, V_α le sous-espace engendré par (P^α, Q^α) et f l'opérateur linéaire de V_α dans V_α défini par

si $X \in V_\alpha$, $f(X) = (X,D)_t$, autrement dit

$f(P^\alpha) = - t\, v\, P^\alpha - t\, y\, Q^\alpha$; $f(Q^\alpha) = t\, y'\, P^\alpha + t\, v\, Q^\alpha$

d'où il découle Tr f = 0

Soit

$$\begin{cases} P'^{\alpha} = x_1 P^{\alpha} + x_2 Q^{\alpha} \\ Q'^{\alpha} = z_1 P^{\alpha} + z_2 Q^{\alpha} \end{cases}$$

la base selon laquelle la matrice associée à f a la forme canonique de Jordan. On trouve qu'il y a trois cas à distinguer

1/ $v^2 - yy' = 0$

si y' = 0 la réponse est donnée par le corollaire IV.4.1., sinon on trouve

$$\begin{cases} x_1 = 1 \quad ; \ z_1 = 1 \\ x_2 = \frac{v}{y'} \quad ; \ z_2 = \frac{1+v}{y'} \end{cases} \quad ; \quad f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{y'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les relations de commutation de $G_t(y,y',v)$ calculés dans la base $(M^{\alpha\beta},P'^{\alpha},Q'^{\beta},D)$ montrent que $G_t(y,y',v)$ est isomorphe à $G_t(0,1/y',0)$, c'est à dire, d'après le corolaire IV.4.1., à l'une des deux algèbres inhomogènes de de Sitter.

2/ $v^2 - yy' > 0$

Si l'on suppose $y' = y = 0$, la réponse est donnée par le corollaire précédent, sinon (en supposant $y' \neq 0$, par exemple) on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \quad ; \quad z_1 = 1 \\ x_2 = (v-a)/y' \; ; \; z_2 = (v+a)/y' \end{cases} ; \quad f = \begin{pmatrix} -ta & 0 \\ 0 & +ta \end{pmatrix}$$

où $a = (v^2 - yy')^{1/2}$

Dans ces conditions, les relations de commutation de $G_t(y,y',v)$ calculées dans la base $(M^{\alpha\beta},P'^{\alpha},Q'^{\beta},D)$ montrent que $G_t(y,y',v)$ est isomorphe à $G_t(0,0,(2a^2)/y')$, c'est à dire à l'algèbre conforme.

3/ $v^2 - yy' < 0$

Comme au 2/, on peut supposer $y' \neq 0$. Seulement dans ce cas il est nécessaire de complexifier l'espace vectoriel sous-jacent pour pouvoir ramener f à sa forme canonique de Jordan. En conséquence nous allons raisonner sur l'algèbre de Lie $G_t^C(y,y',v)$ qui est la complexifiée de l'algèbre de Lie réelle $G_t(y,y',v)$.

En posant $a = (yy' - v^2)$,on obtient

$$\begin{cases} x_1 = 1 \quad ; \; z_1 = 1 \\ x_2 = (v-ia)/2 \; ; \; z_2 = (v+ia)/2 \end{cases} ; \quad f = \begin{pmatrix} -ita & 0 \\ 0 & ita \end{pmatrix}$$

Des relations de commutation de $G_t^C(y,y',v)$ dans la nouvelle base il découle que $G_t^C(y,y',v)$ est isomorphe à la complexifiée de l'algèbre conforme, autrement dit à $A_3 = \mathcal{D}_3$.
Or une algèbre de Lie réelle est semi-simple si et seulement si sa complexifiée est semi-simple [18], d'où le résultat escompté (puisque de plus $G_t(y,y',v)$ n'est pas compacte).

Remarques IV.4.2.

1/ On sait qu'il existe uniquement (à un isomorphisme près) quatre algèbres de Lie semi-simples réelles non compactes de degré quinze, à savoir $SO(3,3)$, $SO(4,2)$, $SO(5,1)$ et $SU(3,1)$. En outre, elles sont toutes caractérisées par leur caractère δ [18] ; plus précisément, soit (μ,ν) la signature de la forme de Killing (où μ désigne les plus et ν les moins) alors $\delta = \mu - \nu = 3$ (resp. 1, -5,-3) pour $SO(3,3)$ (resp. $SO(4,2)$, $SO(5,1)$, $SU(3,1)$). Aussi, si l'on veut déterminer complètement $G_t(y,y',v)$ ($v^2 - yy' < 0$), il suffit de calculer son caractère.

2/ Toutes les algèbres mentionnées dans 1/ contiennent l'algèbre de Lorentz homogène. Par contre $SO(4,2)$ est la seule qui contient l'algèbre de Poincaré et $SU(3,1)$ est la seule qui contient simultanément l'algèbre de Lorentz homogène et $SU(3)$.

Corollaire IV.4.2.

Toute déformation d'une algèbre de Lie appartenant à la famille $\{G_t(y,y',v)\}$ est isomorphe à l'une des formes réelles non compactes de l'algèbre de Lie complexe $A_3 = \mathcal{D}_3$.

Démonstration

Puisque les algèbres de Lie semi-simples sont rigides, il suffit de démontrer la propriété pour les deux algèbres inhomogènes de de Sitter $I\ SO(3,2)$ et $I\ SO(4,1)$.

Un raisonnement similaire à celui de [5] conduit à dim $H^2(S,S) = 1$ et dim $H^3(S,S) = 0$ pour $S = I\ SO(3,2)$, $I\ SO(4,1)$; en outre tout élément $\psi \in H^2(S,S)$ peut être paramétré par

$$\psi(L^a,L^b) = y\ M^{ab} \qquad a,b = 0,1,2,3,5$$

Aussi, les relations de commutation des algèbres déformées sont données par

$$\left(L^a,L^b\right)_t = t\ y\ M^{ab} \qquad (1)$$

Les autres relations étant les mêmes que celles de l'algèbre initiale S.

Explicitons le cas $S = I\ SO(3,2)$ (le traitement de l'autre circonstance étant identique) ; pour ce faire , posons

$$M^{a6} = (1/|ty|^{1/2})\ L^a$$

Il s'ensuit que (M^{ab},M^{a6}) engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $SO(4,2)$ (resp. $SO(3,3)$) si $ty > 0$ (resp. < 0).

Quant au cas $S = I\ SO(4,1)$, il conduit aux algèbres $SO(5,1)$ et $SO(4,2)$.

Remarques IV.4.3.

1/ On pouvait prévoir les déformations des algèbres inhomogènes de de Sitter au moyen du raisonnement suivant : $SO(3,2)$ (resp. $SO(4,1)$ est une sous-algèbre semi-simple maximale de $I\ SO(3,2)$ (resp. $I\ SO(4,1)$ dont le radical s'identifie à T_5 ; comme dans toute déformation seul le commutateur des éléments du radical est altéré [16], la sous-algèbre

semi-simple maximale ne peut qu'augmenter ; aussi, le fait que l'algèbre de Lie $G_{2,2}$ ne contient pas l'algèbre de Lorentz implique que toute déformation des algèbres $I\,SO(3,2)$ et $I\,SO(4,1)$ est soit triviale soit semi-simple.

2/ Il convient de signaler une caractérisation (simple) de la non-rigidité de certaines algèbres de Lie inhomogènes semi-simples due à Richardson [15/]. Soient S une algèbre de Lie (réelle ou complexe) semi-simple et ρ une représentation irréductible de S dans un espace vectoriel de dimension finie V ; considérons V comme une algèbre de Lie abélienne et soit $L = V \oplus S$ la somme semi-directe associée ; alors L n'est pas rigide si et seulement si il existe une algèbre de Lie semi-simple L' telle que : (a) L' contient une sous-algèbre S' isomorphe à S. (b) Si l'on identifie S et S' par un isomorphisme, alors L'/S' est isomorphe, en tant que S-module, à V.

Théorème IV.4.3.

Toute algèbre de Lie de la famille $\{G_\epsilon(y,y',v)\}$ *se contracte (relativement à la sous-algèbre homogène de Lorentz) en l'algèbre* $G = H_4 \oplus SL(2,C)$.

Démonstration

Soient $G_{t_o}(y_o,y'_o,v_o)$ un élément de la famille (distinct de $H_4 \oplus SL(2,C)$) d'espace vectoriel sous-jacent V et φ_λ l'application linéaire (régulière pour $\lambda \neq 0$ et singulière pour $\lambda = 0$) de V dans V définie par $\varphi_\lambda(P^\alpha) = P'^\alpha = \lambda P^\alpha$; $\varphi_\lambda(Q^\alpha) = Q'^\alpha = \lambda Q^\alpha$;

$\varphi_\lambda(D) = D' = \lambda^2 D$; $\varphi_\lambda(M^{\alpha\beta}) = M^{\alpha\beta}$.

Si l'on note $G^\lambda_{t_o}(y_o,y'_o,v_o)$ l'algèbre de Lie engendrée par

$(M^{\alpha\beta}, P'^{\alpha}, Q'^{\alpha}, D')$ (qui appartient à l'orbite de $G_{t_o}(y_o, y'_o, v_o)$, si $\lambda \neq 0$), on trouve que $\lim_{\lambda \to o} G^{\lambda}_{t_o}(y_o, y'_o, v_o) = H_4 \oplus SL(2,C)$.

Remarques IV.4.4.

1/ La contractée A_o d'une algèbre de Lie A étant la limite d'une famille d'algèbres de Lie A_λ (quand $\lambda \to 0$) appartenant à l'orbite $O(A)$, alors A_o appartient à la fermeture $\overline{O(A)}$. Il s'ensuit que $H_4 \oplus SL(2,C)$ est un point d'accumulation des orbites $O(A)$ pour $A = SO(3,3), SO(4,2)$, $SO(5,1)$, $I\,SO(3,2)$, $I\,SO(4,1)$ et éventuellement $SU(3,1)$; en outre, $I\,SO(3,2) \in \overline{O(A)}$ pour $A = SO(4,2)$, $SO(3,3)$ et $I\,SO(4,1) \in \overline{O(A)}$ pour $A = SO(4,2)$, $SO(5,1)$

2/ Soit L^u_{15} le sous-ensemble de L_{15} constitué par les algèbres de Lie unimodulaires ($\forall X \in A$, Tr Ad $X = 0$), c'est un fermé de L_{15} (puisque $A \in L^u_{15}$ équivaut à $C_{ji}{}^{i} = 0$). Si l'on note L^s_{15} (resp. $L^{\mathfrak{s}}_{15}$) le sous-ensemble de L_{15} constitué par les algèbres semi-simples (resp. non semi-simples), on a d'abord $L_{15} = L^u_{15} \cup L^{\mathfrak{s}}_{15}$ (ce qui montre que la variété algébrique L_{15} n'est pas irréductible, puisque $L^{\mathfrak{s}}_{15}$ est également un fermé), ensuite $(H_4 \oplus SL(2,C), I\,SO(3,2), I\,SO(4,1)) \in \overline{L^s_{15}}$ et ($\forall t,y,y',v \in R$) $G_t(y,y',v) \in L^u_{15}$.

C O N C L U S I O N

Nous concluons ce travail en mentionnant quelques remarques et suggestions sur ses continuations possibles :

1°/ Elucider la connexion entre les coordonnées spatiales Q^i (introduites dans ce travail, en relation avec les algèbres de Lie $\mathcal{G}_t(y,y',v)$) et les opérateurs de localisation (au sens de *, pour les particules de masse non nulle, et de ** pour les particules de masse nulle) et généraliser la notion de système d'imprimitivité (qui est le fondement de la localisation, si l'on tient compte de la géométrie de l'espace de Minkowski), aussi bien au niveau des représentations locales qu'à celui des représentations globales non unitaires, afin de donner une signification à la localisation des systèmes décrits par de telles représentations.

Le programme d'une telle approche peut se ramener dans un premier temps, pour un groupe $G \in \mathcal{G}_t(y,y',v)$, aux trois points suivants

(a) Sélectionner (par des argumentations physiques ou par analogie avec *,**) les sous-groupes G_i de G susceptibles de contribuer à la localisation des systèmes

(b) Pour tout G_i, déterminer les r.u.i. de G dont la restriction à G_i possède un système d'imprimitivité

(c) Etudier l'apport du point (b) au niveau des représentations (différenciées) locales.

---

* T.D. NEWTON et E.P. WIGNER, Rev. Mod. Phys. 21, 400 (1949)
A.S. WIGHTMAN, Rev. Mod. Phys. 34, 845 (1962)

** E. ANGELOPOULOS, F. BAYEN et M. FLATO, "On the localizability of massless particles", à paraître dans Physica Scripta.

Il est bien évident que toutes ces questions sont liées à une théorie de représentations induites, locales topologiques ou globales non unitaires, qui reste à faire.

2°/ Etudier les déformations des représentations de $H_4 \oplus SL(2,C)$ et déterminer celles qui conduisent à des représentations des algèbres $G_t(y,y',v)$. Inversement étudier les représentations de ces dernières et leur comportement dans les contractions menant à $H_4 \oplus SL(2,C)$.

3°/ Nous savons qu'il existe des r.u.i. de $SO_o(4,2)$ qui, restreintes à $SO_o(4,1)$, restent irréductibles et que toute r.u.i. de $SO_o(4,1)$ est une somme directe de r.u.i. de SO(4), chacune paraissant au plus une fois. On peut alors procéder à une généralisation des différenciées de ces représentations en considérant, au lieu des différenciées des r.u.i. de SO(4), les représentations locales de $SL(2,C)$ construites au troisième chapitre.

4°/ En vue des applications physiques, étudier les extensions (ou, plus généralement, les unifications) d'une algèbre de Lie G' (qui serait une algèbre interne) par $H_4 \oplus SL(2,C)$ (ou une de ses déformations) et procéder à une généralisation de TCP.

5°/ Parmi les groupes engendrés par les algbères $G_t(y,y',v)$, I $SO_o(4,1)$ occupe une place privilégiée vis à vis du groupe de Poincaré, via les analogies qu'il possède avec ce dernier :

(a) C'est la composante connexe (de l'élément neutre) du groupe des pseudo-isométries de l'espace de Minkowski à cinq dimensions.

(b) Les r.u.i. de son recouvrement universel (à deux feuillets) $T_5 \Lambda S_p(1,1)$ peuvent être déterminées (par la méthode des représentations induites) de façon analogue à celles de $\tilde{P}$; il suffit de substituer aux matrices hermitiennes d'ordre deux (qui représentent R^4) des matrices antisymétriques d'ordre quatre A (qui vont représenter R^5), l'action de $B \in S_p(1,1)$ étant définie par $A \to B\ A\ B^*$.

(c) Comme celles du groupe de Poincaré, ses r.u.i. sont caractérisées par $g_{ab}\ L^a\ L^b$, du signe de "l'énergie" et des représentations induisantes des petits groupes dont les générateurs sont liés au pseudo-tenseur (de Pauli-Lubanski généralisé) $W_{ab} = (1/2)\varepsilon_{abcde}\ L^c\ M^{de}$ ($W_\alpha = W_{5\alpha}$ est le pseudo-vecteur de Pauli-Lubanski habituel associé au groupe de Poincaré) qui satisfait à des relations analogues à celles qui sont vérifiées par W_α, en particulier $W_{ab}\ W^{ab}$ est un invariant et $L_a\ W^{ab} = 0$.

Aussi, il offre une perspective de généralisation directe de la théorie relativiste quantique conventionnelle qu'il serait intéressant d'approfondir.

6°/ Confirmer ou infirmer le fait que toute déformation (à n'importe quel ordre) de $H_4 \oplus SL(2,C)$ est isomorphe à l'une des algèbres $G_t(y,y',v)$.

7°/ Les représentations non fidèles de $H_4 \Lambda SL(2,C)$ (qui sont caractérisées par les orbites planes $\omega = 0$) s'identifient aux r.u.i. du groupe P_2. En conséquence, $g_{\alpha\beta}\ P^\alpha\ P^\beta$ étant un invariant de P_2, elles

pourraient servir à la description d'un système de particules à un nombre infini d'états de spin mais de masse fixée. Si l'on veut une interdépendance du spin et de la masse, on pourrait étudier les déformations de l'algèbre de Lie P_2 qui sont toutes non semi-simples, compte tenu de la stabilité des sous-algèbres semi-simples dans les déformations.

8°/ Un des intérêts physiques des représentations mentionnées dans la proposition III.3.1. réside dans l'apparition d'une algèbre de Lorentz homogène qui commute avec l'énergie-impulsion et les coordonnées de l'espace-temps. Il serait intéressant de l'interpréter comme étant l'algèbre décrivant le spin intrinsèque des particules et d'élucider l'apport physique d'une telle interprétation.

9°/ A l'instar de P et T, la violation de l'invariance par dilatation nécessite l'abandon de sa définition géométrique orthodoxe. On pourrait alors soit substituer à celle-ci un automorphisme convenable de l'une des algèbres de Lie $G_t(y,y',v)$, soit introduire une définition opérationnelle dans une représentation locale de $G_t(y,y',v)$.

10°/ Le passage d'un niveau physique donné à un niveau plus fin induit de nouveaux phénomènes et se traduit par le déficit d'un certain nombre d'informations, déficit qui peut être compensé par l'introduction d'une (ou plusieurs) constante(s) universelle(s). C'est ainsi que la vitesse de la lumièce C compense, en quelque sorte, la perte de l'invariance galiléenne et la constante h celle de la faculté de mesurer simultanément les positions et les impulsions ; l'universalité de C (resp. h) réside dans le fait qu'elle

constitue la limite supérieure (resp. inférieure) des vitesses réelles (resp. de l'imprécision des mesures).

On peut donc envisager que les niveaux subquantiques associés aux groupes $G_t(y,y',v)$ caractérisent un certain type d'intéractions et les paramètres relatifs pourraient contribuer à l'élaboration d'un modèle de groupe de renormalisation.

APPENDICE

A.1. Notations

Si G est un groupe de Lie, G_o (resp. $\tilde{G}$, G, $U(G)$) désigne la composante connexe de l'élément neutre (resp. le groupe de recouvrement universel de G_o, son algèbre de Lie, l'algèbre enveloppante de son algèbre de Lie).

Les symboles $\times$ et Λ désignant respectivement le produit direct et semi-direct de deux groupes.

La somme directe (resp. semi-directe) de deux algèbres de Lie est notée $\oplus$ (resp. $\uplus$) et la somme directe d'espaces vectoriels est désignée par $\oplus$ $\otimes$ représente le produit tensoriel.

Le groupe des translations d'un espace vectoriel à n dimensions est noté T_n et 1_n l'opérateur identité.

I O(p,q) désigne le groupe $T_n \Lambda O(p,q)$ où l'homomorphisme α : $O(p,q) \to \text{Aut } T_n = GL(n,R)$ est défini $\alpha_g(\vec{a}) = g(\vec{a})$; I O(n) est noté E_n

Un groupe (resp. une algèbre de Lie) inhomogène est un produit (resp. somme) semi-direct(e) dont le sous-groupe invariant (resp. l'idéal) de définition est en plus abélien.

Les quatre classes des algèbres de Lie simples sont désignées par A_n, B_n, C_n, D_n.

A.2. Les groupes de Lorentz et de Poincaré

$\vec{x}$ représente le vecteur de R^3 de composantes (x^1,x^2,x^3) et $\underline{x}$ le quadrivecteur de R^4 de composantes (x^o,x^1,x^2,x^3). R^3 est toujours supposé muni du produit scalaire $\vec{x}.\vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ et R^4 du

produit scalaire $\underline{x}.\underline{y} = g_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}\, y^{\beta} = x^{o} y^{o} - \vec{x}.\vec{y}$; où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique habituel $g_{oo} = 1$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$, $g_{oi} = 0$.

Le groupe de Lorentz L est l'ensemble des transformations linéaires réelles, qui laissent invariante la forme bilinéaire $\underline{x}.\underline{y}$, qu'on note $\underline{y} = \Lambda\, \underline{x}$. Comme tous les groupes pseudo-orthogonaux O(p,q), il admet quatre composantes connexes qui contiennent respectivement l'identité, la réflexion de l'espace $I_s(x'^{o} = x^{o}, \vec{x}' = -\vec{x})$, la réflexion du temps $I_t(x'^{o} = -x^{o}, \vec{x}' = \vec{x})$ et la réflexion de l'espace-temps $I_{st}(\underline{x}' = -\underline{x})$; elles sont définies par $\det \Lambda = \pm 1$, $\Lambda^{o}_{o} \geqslant 1$ ou $\Lambda^{o}_{o} \leqslant -1$. Nous notons $L^{\uparrow}_{+}$ la composante connexe de l'identité ($\det \Lambda = 1$, $\Lambda^{o}_{o} \geqslant 1$), $L^{\uparrow}$ le sous-groupe orthochrone ($\Lambda^{o}_{o} \geqslant 1$) et L_{+} le sous-groupe propre ($\det \Lambda = 1$).

Le groupe de recouvrement universel de $L^{\uparrow}_{+}$ est SL(2,C), le groupe unimodulaire complexe à deux dimensions ; c'est un revêtement d'ordre deux : $\pm A \in SL(2,C)$ définissent la même transformation de Lorentz $\Lambda(A)$ par la formule

$$A(\underline{x}.\underline{\sigma})\, A^{*} = (\Lambda(A)\underline{x})\, .\, \underline{\sigma} \qquad \text{où } \underline{x}.\underline{\sigma} = x_{\alpha}\, \sigma^{\alpha}$$

et $\sigma^{\alpha} = (\sigma^{o}, \vec{\sigma})$ sont les matrices de Pauli habituelles

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma^{o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plus explicitement : $\Lambda(A)^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\sigma_{\beta}\, A\, \sigma^{\alpha}\, A^{*})$

Le groupe de Poincaré P = IO(3,1) est formé des pseudo-isométries surjectives de l'espace de Minkowski, il est donc constitué des transformations $\underline{x}' = \Lambda\, \underline{x} + \underline{a}$ que nous notons $(\underline{a},\Lambda)$. La loi de composition est la suivante :

$$(\underline{a}_1 , \Lambda_1)\, (\underline{a}_2 , \Lambda_2) = (\underline{a}_1 + \Lambda_1 \underline{a}_2, \Lambda_1\, \Lambda_2)$$

Comme pour le groupe de Lorentz L, le groupe de Poincaré a quatre composantes connexes ; on les obtient en considérant $(\underline{a},\Lambda)$ $\underline{a}$ arbitraire et Λ parcourant l'une des composantes de L. Nous notons $P_+^\uparrow$ la composante connexe de l'identité et $P^\uparrow$, P_+ les sous-groupes de P constitués par les éléments $(\underline{a},\Lambda)$, Λ appartenant respectivement à $L^\uparrow$ et L_+. Le groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré $\tilde{P}$ est simplement obtenu en substituant au sous-groupe de Lorentz son recouvrement universel SL(2,C). Si on représente par $(\underline{a},A)$ un élément de $\tilde{P}$, la loi de groupe s'écrit alors :

$$(\underline{a}_1 , A_1) (\underline{a}_2, A_2) = (\underline{a}_1 + \Lambda(A_1)\, \underline{a}_2 , A_1 A_2)$$

Aussi $\tilde{P}$ apparait comme une inhomogénéisation de SL(2,C) relativement à la représentation $D(1/2,1/2) = D(1/2,0) \otimes D(0,1/2)$.

Si l'on note P^α les générateurs infinitésimaux des translations, $M^{\alpha\beta}$ ceux des transformations de Lorentz, les relations de commutations de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré sont données par

$$\left(M^{\alpha\beta} , M^{\gamma\delta}\right) = - \left(g^{\alpha\gamma} M^{\beta\delta} + g^{\beta\delta} M^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\delta} M^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma} M^{\alpha\delta} \right)$$

$$\left(M^{\alpha\beta} , P^{\gamma} \right) = g^{\beta\gamma} P^{\alpha} - g^{\alpha\gamma} P^{\beta}$$

$$\left(P^{\alpha} , P^{\beta}\right) = 0$$

A.3. *Le groupe de Galilée*

C'est le groupe des transformations de l'espace et du temps engendrées par les rotations spatiales R, les transformations de Galilée pures $\vec{v}$, les translations d'espace $\vec{a}$ et de temps b. On note l'un de ses éléments par $(b,\vec{a},\vec{v},R)$ avec, par définition

$$\vec{x}' = R\,\vec{x} + \vec{v}\,t + \vec{a} \qquad , \; t' = t + b$$

La loi de groupe s'écrit alors

$$(b_1,\vec{a}_1,\vec{v}_1,R)\ (b_2,\vec{a}_2,\vec{v}_2,R) = (b_1+b_2\ ,\ \vec{a}_1+R_1\vec{a}_2 + b_2\vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_1+R_1\vec{v}_2,R_1R_2)$$

Le groupe de recouvrement universel est simplement obtenu en substituant au sous-groupe des rotations, son recouvrement universel SU(2). Les matrices $\pm B \in SU(2)$ déterminent la même rotation R(B) par la formule

$$B(\vec{x}.\vec{\sigma})B^{*} = (R(B)\vec{x}).\vec{\sigma} \qquad \text{où } \vec{x}.\vec{\sigma} = x_i\ \sigma^i$$

Si l'on note $(b,\vec{a},\vec{v},B)$ l'élément générique, la loi de groupe s'écrit

$$(b_1,\vec{a}_1,\vec{v}_1,B_1)\ (b_2,\vec{a}_2,\vec{v}_2,B_2) = (b_1+b_2,\vec{a}_1+R(B_1)\vec{a}_2+b_2\vec{v}_1,\vec{v}_1+R(B_1)\vec{v}_2,B_1B_2)$$

Si l'on désigne par J^i, K^i, P^i (i=1,2,3) les générateurs infinitésimaux des rotations, transformations de Galilée pures et translations d'espace respectivement et par P^o le générateur des translations de temps, les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Galilée s'écrivent :

$$(J^i,J^j) = \varepsilon^{ijk}\ J^k \quad ; \quad (J^i,K^j) = \varepsilon^{ijk}\ K^k \quad ; \quad (K^i,K^j) = 0$$
$$(J^i,P^j) = \varepsilon^{ijk}\ P^k \quad ; \quad (K^i,P^j) = 0 \quad ; \quad (J^i,P^o) = 0$$
$$(K^i,P^o) = P^i \quad ; \quad (P^i,P^j) = 0 \quad ; \quad (P^i,P^o) = 0$$

A.4. Cohomologie des algèbres de Lie *

Soient A une algèbre de Lie et V un A-module (l'image de $v \in V$ par le représentant de l'élément $X \in A$ est noté X.v). Une n-cochaîne (à coefficients dans V) est une application n-linéaire et alternée

---

* C.CHEVALLEY et S. EILENBERG , Trans. Amer. Math. Soc. 63, 85 (1948) et Séminaire "Sophus Lie" 1954/55 (Secrétariat Mathématique, Paris 1955).

$f : \underbrace{A\times\ldots\times A}_{n} \to V$ (pour $n = 0$ c'est une application constante et pour $n < 0$ c'est l'application nulle). L'espace des n-cochaînes est noté $C^n(A,V)$ ($C^0(A,V) = V$ et $C^n(A,V) = \{0\}$ si $n < 0$).

Désignons par $C(A,v)$ la somme directe des espaces vectoriels $C^n(A,V)$, $n \in Z$. On définit sur $C(A,V)$ les trois endomorphismes suivants :

(a) Si f est une n-cochaîne, on définit son cobord comme la n+1-cochaîne

$$(\delta f)(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\, X_i.f(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{n+1})$$

$$+ \sum_{i<j=1}^{n+1} f\big(X_i,X_j\big),X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_n,\ldots X_{n+1})$$

pour $n > 0$, où le signe $\wedge$ au dessus d'une lettre signifie qu'on doit omettre cette lettre dans l'expression en question, et

$$(\delta f)(X_1) = X_1.f \qquad \forall f \in C^0(A,V)$$

Il s'ensuit que $\delta(C^n(A,V)) \subset C^{n+1}(A,V)$ et $\delta^2 = 0$

(b) Si $X \in A$ et $f \in C^n(A,V)$, $d_X f$ est défini par

$$(d_X f)(X_1,\ldots,X_n) = X.f(X_1,\ldots,X_n) - \sum_{i=1}^{n} f(X_1,\ldots,X_{i-1},\big(X,X_i\big),X_{i+1},\ldots,X_n)$$

pour $n > 0$ et $d_X f = X.f$ si $f \in C^0(A,V)$.

Aussi $d_X(C^n(A,V)) \subset C^n(A,V)$. Il en découle que si I est un idéal de A, la structure de A-module de V induit une structure de A-module sur $C^n(I,V)$ (il suffit de prendre, dans la relation ci-dessus, $f \in C^n(I,V)$).

(c) Si $X \in A$ et $f \in C^n(A,V)$, on définit f_X par

$$f_X(X_1,\ldots,X_{n-1}) = f(X,X_1,\ldots,X_{n-1}), \text{ pour } n>0 \text{ et}$$

$$f_X = 0 \quad \text{si } f \in C^0(A,V)$$

On a donc la relation $f_X(C^n(A,V)) \subset C^{n-1}(A,V)$.

Un n-cocycle est une n-cochaîne dont le cobord est nul. On note $Z^n(A,V)$ l'espace des n-cocycles, c'est le noyau de l'application $\delta : C^n(A,V) \to C^{n+1}(A,V)$. $B^n(A,V)$ désigne l'espace des n-cochaînes qui sont aussi des cobords {de (n-1)-cochaînes} , $B^n(A,V) = \delta\, C^{n-1}(A,V)$, $B^0(A,V) = \{0\}$. La relation $\delta^2 = 0$ montre que $B^n(A,V)$ est un sous-espace de $Z^n(A,V)$. L'espace vectoriel $H^n(A,V) = Z^n(A,V)/B^n(A,V)$ s'appelle le n-ième espace de cohomologie de A à coefficients dans V ; $H^0(A,V)$ s'identifie au sous-espace des invariants du A-module V.

La relation $\delta d_X = d_X \delta$ implique que, si I est un idéal de A, la structure de A-module de $C^n(I,V)$ (cf. (b) ci-dessus) induit une structure de A-module sur $H^n(I,V)$.

Si S est une sous-algèbre de A, $f \in C^n(A,V)$ est dite orthogonale à S si :

$$d_X f = 0 \qquad \text{et} \quad f_S = 0 \quad \forall S \in S$$

Les relations $\delta d_X = d_X \delta$ et $(\delta f)_X + \delta(f_X) = d_X f$ montrent que si f est orthogonale à S, δf l'est également. Ce qui va nous permettre de définir les espaces de cohomologie relative à S : l'espace vectoriel $C^n(A,S,V)$ des n-cochaînes orthogonales à S (resp. $Z^n(A,S,V) = Z^n(A,V) \cap C^n(A,S,V)$; $B^n(A,S,V) = \delta C^{n-1}(A,S,V)$) est appelé l'espace des n-cochaînes (resp. n-cocycles, n-cobords) relativement

à S ; le n-ième groupe de cohomologie relative à S est
$H^n(A,S,V) = Z^n(A,S,V)/B^n(A,S,V)$.

Si I est un idéal de A tel que A/I est semi-simple, A va contenir une sous-algèbre S supplémentaire de I dans A et l'on a $H^n(A,S,V) = H^n(I,V)^A$, ce dernier étant le sous-espace des invariants du A-module $H^n(I, V)$.

REFERENCES

PREMIER CHAPITRE

0/ T. FULTON, F. ROHRLICH, L. WITTEN, Rev. Mod. Phys. 34, 442 (1962).

H.A. KASTRUP, Ann. Physik (Leipzig), 9, 388, (1962).

A.O. BARUT et W.E. BRITTIN (Ed.Sc.) : "De Sitter and conformal groups and their applications" : Lectures in Theoretical Physics, Volume XIII (Colorado Ass. University Press, Boulder, 1971).

Paragraphe I.1.

1/ J.M. LEVY-LEBLOND, dans "Group Theory and its Applications,Vol.II" Ed.Sc. E.M. LOEBL (Academic Press, New York, 1971) où l'on trouve un exposé et une bibliographie extensive sur le groupe de Galilée.

2/ W. PAULI, "Theory of relativity" (Pergamon Press, 1958)

3/ E. CUNNINGHAM, Proc. Lond. Math. Soc. 8, 77 (1910)
H. BATEMAN, Proc. Lond. Math. Soc. 8, 223 (1910)

4/ J. LIOUVILLE, note VI dans le livre de G. MONGE : "Application de l'analyse à la géométrie" (Bachelier,Paris,1850)

5/ F. ENGEL et S. LIE : "Theorie der transformations gruppen".Vol.III (B.G. Teubner, Leipzig, 1893).

6/ L. PAGE, Phys. Rev. 49, 254, 946 (1936)
L. PAGE et N.I. ADAMS, Phys. Rev. 49, 466 (1936)

7/ H.T. ENGSTROM et M. ZORN, Phys. Rev. 49, 701 (1936)
H.P. ROBERTSON, Phys. Rev. 49, 755 (1936)

8/ J. HAANTJES, Proc. Ned. Akad. Wet 43, 3 (1940)
E.L. HILL, Phys. Rev. 72, 143 (1947)

9/ F. KLEIN, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 171 (1918)
E. NOETHER, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, 235 (1918)

10/ E. BESSEL-HAGEN, Math. Ann. 84, 258 (1921)

11/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, C.R.A.Sc. 263, 935 (1966)

12/ H.A. KASTRUP, Nucl. Phys. 58, 561 (1964) et Phys. Rev. 142, 1060 (1966), 150, 1183 (1966)

13/ A. CLARK, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1969.
J. MICKELSON et J. NIEDERLE, J. Math. Phys. 13, 23 (1972)

14/ J. HAANTJES et J.A. SCHOUTEN, Physica 1, 869 (1934)
O. VEBLEN, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 21 , 484 (1935)
J. HAANTJES, Proc. Kon. Akad. V. Wetensch. 43, 1288 (1940)
L. INFELD et A. SCHILD, Phys. Rev. 70, 410 (1946)
J.A. Mc LENNAN, Nuov. Ciment. 3, 1360 (1956) et 5, 640 (1957)
H.A. BUCHDAHL, Nuov. Ciment. 11, 496 (1959)
F. GURSEY, Nuov. Ciment. 3, 988 (1956)
J.S. LOMONT, Nuov. Ciment. 22, 673 (1961)
S.A. BLUDMAN, Phys. Rev. 107, 1163 (1957)
W.A. HEPNER, Nuov. Ciment. 26, 351 (1962)
P.A.M. DIRAC, Ann. Math. 37, 429 (1936)
J. WESS, Nuov. Ciment. 18, 1086 (1960)
L. GROSS, J. Math. Phys. 5, 687 (1964)
B. KURSUNOGLU, J. Math. Phys. 8, 1694 (1967)
R. PENROSE, Proc. Roy. Soc. London 284A , 159 (1965)

15/ E.P. WIGNER, Phys. Rev. 51, 106 (1937)

16/ "High-Energy Physics and elementary particles". IAEA Trieste 1965

17/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, J. Math.Phys. 7, 1932 (1966)

18/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Phys. Rev. Lett. 16, 1185 (1966)

19/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Commun. Math. Phys. 12, 296 (1969)

20/ A.O. BARUT, "Dynamical groups and Generalized symmetries in Quantum theory" (Univ. Canterbury Press, 1972) où l'on trouve un exposé et une biblio graphie sur la question.

21/ Y. DOTHAN, Phys. Rev. D2, 2944 (1970)

22/ A. WYLER, C.R.A.Sc. 269, 743 (1969), 271, 186 (1971)

Paragraphe I.2.

1/ A. CLARK, Phy. D. Thesis, Princeton University, 1969

2/ H. BOERNER, "Representations of groups", (North-Holland Publ., Amsterdam, 1969)

3/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Phys. Rev. Letters, 16, 1185 (1966)

4/ L.O'RAIFEARTAIGH, Phys. Rev. 139 , B 1052 et Phys. Rev. Letters 14, 372, 575 (1965)

5/ M. FLATO, Thèse, Paris 1965

6/ P. ROMAN, "Theory of elementary Particles (North-Holland Publ. Amsterdan, 1961)

7/ H. FREUDENTHAL et H. de VRIES, "Linear Lie Groups", (Academic Press, New York, 1969)

8/ A.O. BARUT, dans "Lectures in Theoretical Physics. Vol. XIII : De Sitter and Conformal Groups and their Applications" (Colorado Associated University Press, Boulder, Colorado 1971)

9/ C. CHEVALLEY, "Theory of Lie groups" (Princeton University Press 1946)

10/ M. FLATO et P. HILLION, Phys. Rev. D1, 1667, (1970)

11/ R. DELBOURGO, M.A. RASHID, A. SALAM et J. STRATHDEE, dans "High-Energy Physics and Elementary Particles" (I.A.E.A., Vienna, 1965)

12/ G. LOUPIAS, M. SIRUGUE et J.C. TROTIN, Nuov. Ciment. 38, 1303 (1965)

13/ F. BAYEN, Thèse 1970, Dijon

Paragraphe I.3.

1/ G. RACAH, "Group Theory and Spectroscopy" (Princeton, 1951), publié dans : Springer Tracts in Modern Physics Vol. 37
I.M. GEL'FAND, et M.L. ZETLIN, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 71, 925, 1017 (1950)

2/ F. BRUHAT, Bull. Soc. Math. France, 84, 97 (1956)
E.M. STEIN, dans "High-Energy Physics and Elementary Particles" (I.A.E.A., Vienna, 1965)
G. WARNER, "Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups "(Springer Verlag, Berlin, 1972)

3/ A.A. KIRILLOV, Russ. Math. Surv. 17, 53 (1962)

4/ M.I. GRAEV, Transl. Amer. Math. Soc. (2) 66, 1 (1967)
R. RACZKA, Acta. Phys. Austriaca Suppl. III, 260 (1967)
I.M. GEL'FAND et M.I. GRAEV, dans 'High-Energy Physics theory and Elementary Particles" (Intern. School Theoret. Phys.,Yalta 1966, Naukova Dumda, Kiev,1967)
A.ESTEVE et P.G. SONA, Nuov. Ciment. 32, 473 (1964)
N.W. MACFADYEN, J. Math. Phys. 12, 1436 (1971), 14, 57, 638 (1973) et Nuov. Cimento 10A, 268 (1972)
T. HIRAI, J. Math. Soc. Japan 22, 134 (1970)

5/ G. MACK et I. TODOROV, J. Math. Phys. 10, 2078 (1969)
J. MICKELSON et J. NIEDERLE, J. Math. Phys. 13, 23 (1972)
P.L. FERREIRA, Rev. Mex. Fis. 18, 233 (1969)
F. SCHWARZ, dans "Lectures in theoretical Physics Vol XIII :

De Sitter and Conformal Groups and their applications (Colorado Associated University Press, Boulder, Colorado (1971))

6/ L. CASTELL, Nucl. Phys. B4, 343 (1967) et J. Math. Phys. 11, 1669 (1970)
T. YAO, J. Math. Phys. 8, 1931 (1967) ; 9, 1615 (1968) ; 12, 315 (1971) ; voir également dans "Lectures in Theoretical Physics Vol. XIII ci-dessus .
J. NIEDERLE, J. Math. Phys. 8, 1921 (1967)
N. LIMIC et J. NIEDERLE, Ann. Inst. H. Poincaré 9, 327 (1968)

7/ J. DIXMIER, Compt. Rend. 250, 3263 (1960)

8/ Y. MURAI, Prog. Theor. Phys. (Kyoto), 9, 147 (1953), 11, 441 (1954)

9/ HARISH-CHANDRA, Trans. Amer, Math. Soc. 75, 185 (1953), 76, 26, 234 , 485 (1954)
A. KIHLBERG, Arkiv. Fysik 30, 121 (1965)
A. KIHLBERG, V.F. MULLER et F. HALBWACHS, Comm. Math. Phys. 3, 194 (1966)

Paragraphe I.4.

1/ U. OTTOSON, Arkiv Fysik, 33, 523 (1967)

2/ L. MICHEL, dans "Application of Mathematics to Problems in Theoretical Physics" (Gordon and Breach, New York, 1967)

3/ E.C. ZEEMAN, J. Math. Phys. 5, 490 (1964)

4/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, C.R.A.Sc. 263, 935 (1966)

Paragraphe I.5.

1/ L. MICHEL, dans "Group Theoretical concepts and Methods in Elementary Particle Physics" (Gordon and Breach New York, 1964)

2/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, J. Math. Phys. 7, 1932 (1966)
M. FLATO, Thèse Paris 1965

3/ W.D. McGLINN, Phys. Rev. Lett. 12, 467 (1964)

4/ O.W. GREENBERG, Phys. Rev. 135, B1447 (1964)

5/ L. MICHEL, Phys. Rev. 137, B405 (1965)

6/ L. MICHEL, B. SAKITA, Ann. I. H.P. 2, 167 (1965)

7/ S. COLEMAN, dans "Symmetry principles and Fundamental Particles" (W.H. Freeman and Co, 1966)

8/ L. de BROGLIE, D. BOHM, P. HILLION, F. HALBWACHS T. TAKABAYASI et J.P. VIGIER, Phys. Rev. 129, 438, 451 (1963)

9/ E.P. WIGNER, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 36, 184 (1950)
A.O. BARUT et W.E. BRITTIN (Ed), "De Sitter and Conformal groups and their applications" (Colorado Ass. Univ. Press, 1971)
F. GURSEY dans "Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics" (Gordon and Breach, New York 1964)
C. FRONSDAL, Rev. Mod. Phys. 37, 221 (1965)

10/ M. LEVY-NAHAS, J. Math. Phys. 8, 1211 (1967)
W.T. SHARP, (Racah algebra and the contraction of groups, Research Rept, CRT-935, AECL-1098, Atomic Energy of Canada Limited, Chalk River, Ontario 1960)

11/ P. HILLION, Ann. I. Henri Poincaré 8, 53 (1968)

12/ C. FRONSDAL, Proc. Roy. Soc. A288, 98 (1965)
G. BISIACCHI et C.FRONSDAL, Nuov. Ciment. 42A, 220 (1966)

13/ I.M. GEL'FAND et M.I. GRAEV, dans "High Energy Physics and Elementary Particles" International school Theoretical Physics, Yalta 1966. Naukova Dumka, Kiev 1967

14/ D. BOHM, M. FLATO, D. STERNHEIMER et J.P. VIGIER, Nuov. Ciment. 38, 1941 (1965)

15/ L. O'RAIFEATAIGH, Phys. Rev. Letters 14, 372, 575 (1965) et Phys. Rev. 139B, 1052 (1965)

16/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Phys. Rev. Lett. 16, 1185 (1966) ; 15 (1965), 934 ; comm. Math. Phys. 12, 296 (1969) et comm. Math. Phys. 14, 5 (1969)

17/ R. JOST, Helv. Phys. Acta. 39, 369 (1966)
I.E. SEGAL, J. Funct. Anal. 1, 1 (1967)
D. STERNHEIMER, Thèse Paris 1968

Paragraphe I.6.

1/ L. INFELD et T.E. HULL, Rev. Mod. Phys. 23, 21 (1951)
W. MILLER Jr, "Lie Theory and special Functions" ch.7 (Academic Press, 1968)

2/ A. BHATTACHARJIE et E.C.G. SUDARSHAN, Nuov. Ciment. 25, 864 (1962)
A. LEMIEUX et A.K. BOSE, Ann. Inst. H. Poincaré 10, 259 (1969)

3/ W. PAULI, Z.f. Phys. 36, 336 (1926)
V. FOCK, Z.f. Phys. 98, 145 (1935)
V. BARGMANN, Z.f.Phys. 99, 576 (1936)
L. HULTHÉN, Z.f. Phys. 86, 21 (1933)
J.M. JAUCH et E.L. HILL, Phys. Rev. 57, 641 (1940)

4/ D.R. SPEISER et J. TARSKI, Journ. Math. Phys. 4, 588 (1963)

5/ A.O. BARUT, "Dynamical Groups and Generalized Symmetries in Quantum Theory" (Univ. Canterbury Press, 1972)
M.J. ENGLEFIELD, "Group Theory and the Coulomb Problem (Wiley Interscience, New York, 1972)

6/ (a) H.F. GAUTRIN, R. PRASAD et J.P.VIGIER, C.R.A.Sc. 262B, 1177 (1966)
(b) A.O. BARUT et R.B. HAUGEN, Preprint ic/72/159 et ic/73/46 (I.A.E.A. Trieste)

7/ M. FLATO et P. HILLION, Phys. Rev. D1, 1667 (1970)
P. HILLION, Ann. Inst. H. Poincaré, 13, 253 (1970)

8/ A.O. BARUT et H. KLEINERT, Phys. Rev. 161, 1464 (1967)
A.O. BARUT, dans "Springer Tracts in Modern Physics" Vol. 50 (Springer Verlag, 1969) et "Lectures in Theoretical Physics" Vol.XB (Gordon and Breach, N.Y.)

9/ N. SVARTHOLM, Ed. "Elementary Particle Theory, relativistic groups and analyticity" Nobel Symposium 8 (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968). Voir spécialement les contributions de Y. NAMBU et R.F. STREATER.

10/ V. BARGMANN, Math. Rev. 10, 584 (1949)

11/ R. JOST, "The General theory of Quantized Fields" (Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1965)

12/ S. WEINBERG, Phys. Rev. B139, 597 (1965)

Paragraphe I.7.

1/ M. FLATO, J. SIMON et D. STERNHEIMER, Ann. of Phys. (N.Y.) 61, 78 (1970)

2/ M. FLATO et P. HILLION, Phys. Rev. D1, 1667 (1970)

3/ U. NIEDERER, Helv. Phys. Acta. 45, 802 (1972)
A.O. BARUT, I.A.E.A. Preprint ic/73/24, Trieste

4/ M. FLATO, P. HILLION et J. SIMON, C.R.A.Sc. 268A, 1065 (1969)

5/ D.J. GROSS et J. WESS, Phys. Rev. D2, 753 (1970)
G. MACK et A. SALAM, Ann. of Phys. (N.Y.) 53, 174 (1969)

6/ R. KOTECKY et J. NIEDERLE, "Conformally convariant Field equations" Inst. Phys. Czechoslovak Academy of Sciences Februry 1973

7/I.M. GEL'FAND, P.A. MINLOS et Z. Ja. SHAPIRO, "Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications", (Pergamon, New York, 1963)

8/ F. BAYEN, Thèse Dijon, 1970 ; C.R.A.Sc. 269, 546 (1969) et Nuov. Ciment. 68A , 39 (1970)

DEUXIEME CHAPITRE

1/ S. HORCHANI, Ann. Inst. H. Poincaré, 15, 321 (1971)

2/ W. HEISENBERG, Ann. Phys. 32, 20 (1938) ; Rev. Mod. Phys. 29, 269 (1957)
L.D. LANDAU dans "Niels Bohr and the development of Physics" Ed. Sc. W. PAULI (Pergamon Press, 1955)
D.I. BLOKHINTSEV, Phys. Lett. 12, 272 (1964)
L.G. REDEL, Phys. Rev. 145, 999 (1966)

3/ S. DESER, Rev. Mod.Phys. 29, 417 (1957)
J.A. WHEELER, Ann. Phys. 2, 604 (1957)

4/ M. GUENIN et B. MISRA, Helv. Phys. Acta. 36, 500 (1953)

5/ I.M. GEL'FAND, R.A. MINLOS et Z.Ya. SHAPIRO, "Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications" (Pergamon Press, New York 1963)

6/ D. STERNHEIMER, J. Math. pures et appliquées 47, 247 (1968)

7/ E.P. WIGNER, Ann. of Math. 40, 149 (1939)

8/ V. BARGMANN, Ann. of Math. 59, 1 (1954). Voir également
D.J. SIMMS, Rep. Math. Phys. 2, 283 (1971)

9/ E.P. WIGNER, "Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra" (Academic Press 1959). Voir également G.EMCH et C. PIRON, J. Math. Phys. 4, 469 (1963) ; V. BARGMANN, J. Math. Phys. 5, 862 (1964)

10/ E. INONU et E.P. WIGNER, Nuov. Ciment. 9, 705 (1952)
M. HAMERMESH, Ann. of Phys. (N.Y.) 9, 518 (1960)

11/ J.M. LEVY-LEBLOND, dans "Group theory and its applications II" Ed. Sc. E.M. LOEBL (Academic Press, N.Y. 1971)
J. VOISIN, Mem. Acad. Roy. Belgique, cl. Sciences 38, 1 (1968)

12/ R.F. STREATER et A.S. WIGHTMAN, "PCT, spin and Statistics, and all that" (Benjamin, N.Y. 1964)

13/ F. RIESZ et B.Sz. NAGY, "Leçons d'analyse fonctionnelle" (Gauthier-Villars, Paris)

14/ I.E. SEGAL, Proc. Am. Math. Soc. 3, 13 (1952)
E. NELSON et W.F. STINESPRING, Amer. J. Math. 81, 547 (1959)

15/ R.A. BERG, J. Math. Phys. 6, 34 (1965)

16/ I.E. SEGAL, Duke Math. Journ. 18, 221 (1951)

17/ E. INONU et E.P. WIGNER, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 39, 510 et 40, 119 (1953)

18/ E. SALETAN, J. Math. Phys. 2, 1 (1961)

19/ W.T. SHARP, "Racah Algebra and the contraction of groups", Research, Rept. CRT-935, AECL 1098, Atomic Energy of Canada Limited, Chalk River, Ontario 1960

20/ C.W. CONATSER, dans "Texas Tech University, Mathematics series n° 10, 1972" où l'on trouve un exposé et une bibliographie sur les déformations.

21/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Comm. Math.Phys. 12, 296 (1969)

22/ N. BOURBAKI, "Groupes et algèbres de Lie I" (Hermann, Paris 1960)

23/ J.J. AGHASSI, P. ROMAN et R.M. SANTILLI, Phys. Rev. D1, 2753 (1970) et J. Math. Phys. 11, 2297 (1970)

24/ M. NOGA, Phys. Rev. D2, 304 (1970)

TROISIEME CHAPITRE

1/ S. HORCHANI, C.R.A.Sc. Paris A.276, 419 (1973)

2/ P.D.B. COLLINS, Phys. Rep. 1c, 103 (1971)

3/ L. SERTORIO et M. TOLLER, Nuov. Ciment. 33, 413 (1964)
H. JOOS, dans "Lectures in theoretical physics", Vol. 7A, Edité par W.E. BRITTIN et A.O. BARUT (Univ. Colorado Press, 1965)
F.T. HADJIONANNOU, Nuov. Ciment. 44A , 185 (1966)
E.G. BELTRAMETTI et G. LUZZATTO, Nuov. Ciment. 29, 1003 (1963) ibid. 51A, 148 (1967)

M. ANDREWS et J. GUNSON, J. Math. Phys. 5, 1391 (1964) ibid. 6 852 (1965)
M. TOLLER, Nuov. Ciment. 54A, 295 (1968)

4/ M. TOLLER, Nuov. Ciment. 53A, 671 (1968)
C. DOMOKOS et G.L. TINDLE, Phys. Rev. 165, 1906 (1968) et comm. Math. Phys. 7, 160 (1967)

5/ E.H. ROFFMAN, Phys. Rev. Letters, 16, 210 (1966) et Comm. Math. Phys. 4, 237 (1967)

6/ G. SOLIANI et M. TOLLER, Nuov. Ciment. 15A, 430 (1973)

7/ M. FLATO et H. SNELLMAN, "Regge Lattice and Lie-algebra representations". Preprint Collège de France (1972)

8/ M. SIMONIUS, Helv. Phys. Acta. 43, 223 (1970)

9/ F. LURCAT, Phys. Rev. 173, 1461 (1968)

10/ L.S. SCHULMAN, Ann. Phys. (N.Y.) 59, 201 (1970)

11/ J. BERTRAND et G. RIDEAU, "non-unitary representations and Fourier transform on the Poincaré group" Preprint I.H.P. (1973)

12/ R. RACZKA, "A theory of relativistic unstable particles", Preprint Institute for Nuclear Research, Warsaw, Poland, 1972

13/ K. BLEULER, Helv. Phys. Acta. 23, 567 (1950)
S.N.GUPTA, Proc. Phys. Soc. A63 , 691 (1950)

14/ P.M. MATHEWS, M. SEETHARAMAN et M.J. SIMON, Preprint IC/73/59, I.A.E.A. Trieste

15/ R. JOST, "The general theory of quantized Fields" (Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1965)

16/ A.O. BARUT et R. RACZKA, Ann. I. Henri Poincaré, 17, 111 (1972)

17/ J. SCHWINGER, Phys. Rev. Letters. 18, 923 (1967)
A. SALAM et J. STRATHDEE, Phys. Rev. 184, 1750, 1760 (1969)
S. COLEMAN, J. WESS et B. ZUMINO, Phys. Rev. 177, 2239 (1969)
C.G. CALLAN, S. COLEMAN, J. WESS et B. ZUMINO, Phys. Rev. 177; 2247 (1969)
C.J. ISHAM, Nuov. Ciment. 61A, 188 (1969)
J. MICKELSON et J. NIEDERLE, Preprint IC/69/48; I.A.E.A. Trieste
C.J. ISHAM, A. SALAM, et J. STRATHDEE, Ann. Phys. (N.Y.) 62, 98 (1971)

18/ S.A. GAAL, "Linear Analysis and Representation theory" (Springer Verlag, Berlin, 1973)

19/ A. KATZ et Y. FRISHMAN, Suppl. Nuov. Ciment. 5, 749 (1967)
A. KATZ , Nuov. Ciment. 44A, 871 (1966)

20/ E. HEWITT et A. ROSS, "Abstract harmonic analysis I" (Springer Verlag, Berlin 1963)

21/ L. VAN NOVE, Acad. Roy. Belgique, classe des Sciences, mémoires, t.26, Fasc. 6 (1951)

22/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Comm. Math. Phys. 14, 5 (1969)

23/ C.N. YANG et R.C. MILLS, Phys. Rev. 96, 191 (1954)

24/ J.J. SAKURAI, Ann. Phys. (N.Y.) 11, 1 (1960)
R. UTIYAMA, Phys. Rev. 101, 1597 (1956)

25/ M. FLATO et D. STERNHEIMER, Phys. Rev. Letters, 16, 1185 (1966)

26/ A. ERDELY, W. MAGNUS, F. OBERTHETTINGER et F.G. TRICOMI, "Higher Transcendental Functions (Bateman manuscript Project)" (McGraw-Hill book company, Inc. New York 1953)

27/ E. CARTAN, Rend. Circ. Mat. Palermo 53, 217 (1929)

28/ M. FLATO, J. SIMON et D. STERNHEIMER, C.R.A.Sc. Paris A277 939, (1973)

29/ R.J. BLATTNER, Trans. Amer. Math. Soc. 144, 457 (1969)
J. DIXMIER, J. Math. Pures et Appl. 50, 1 (1971)

30/ G.W. MACKEY, "The theory of group representations (dept. of Math. University of Chicago, 1955)

31/ E.P. WIGNER, Ann. of Math. 40, 149 (1939)

32/ G.W. MACKEY, "Group representations and applications "(Oxford University, Academic Year 1966/67) at Ann. of Math. 55, 101 (1952)

33/ C. RACAH, "Group theory and Spectroscopy" (Princeton, 1951) publié dans : Springer tracts in Modern Physics, Vol. 37

34/ C. MARTIN, Thèse, Dijon, 1972

35/ J. DIXMIER, Anais Acad. Brasil. Ciencias 35, 491 (1963)

36/ J. DIXMIER, Bull. Soc. Math. France 96, 209 (1968) et id. 94 289 (1970)

37/ A.A. KIRILLOV, Russ. Math. Surv. 17 , 53 (1962)

38/ M. FLATO, J. SIMON, H. SNELLMAN et D. STERNHEIMER, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 5, 423 (1972)

39/ W. MILLER Jr, "On Lie algebras and some special functions of Mathematical Physics" (Amer. Math. Soc. Memoirs n° 50 , 1964) et "Lie theory and Special functions" (Academic Press, N.Y. 1968)

40/ M.A. NAIMARK, "Les représentations linéaires du groupe de Lorentz (Dunod, Paris, 1962)

41/ J. ROSEN et P. ROMAN, Journ. Math. Phys. 7, 2072 (1966)

42/ H. JOOS, Fortschr. Physik, 10, 65 (1962)

QUATRIEME CHAPITRE

1/ S.HORCHANI, C.R.A.Sc. Paris, 277A, 201 (1973)

2/ M. GERSTENHABER, Ann. Of Math. 79, 59 (1964)

3/ G. WATAGHIN, C.R.A.Sc. Paris, 207, 358,421 (1938)

4/ L.L. FOLDY, Phys. Rev. 122, 275 (1961)

5/ M.LEVY-NAHAS, Journ. Math. Phys. 8,1211 (1967)

6/ A. NIJENHUIS et R.W. RICHARDSON Jr., Bull. Amer. Math. Soc. 72, 1 (1966) et J. Math. Mech. 17, 89 (1967)

7/ C. CHEVALLEY, "Fondements de la géométrie algébrique" (Secrétariat mathématique , Paris, 1958) et "Théorie des groupes de Lie : groupes algébriques, théorèmes généraux sur les algèbres de Lie" Hermann Paris, 1968)

8/ F. BRUHAT, "Géométrie algébrique élémentaire (Secrétariat mathématique, Paris, 1965)

9/ N. BOURBAKI, "Groupes et algèbres de Lie" (Hermann, Paris 1960)

10/ G. LEGER, Duke Math. J. 30, 637 (1963)

11/ G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE, Ann. of Math. 57, 591 (1953)

12/ N. JACOBSON, "Lie algebras" (John Wiley and Sons, N.Y. 1966)

13/ J.L. KOSZUL, Bull. Soc. Math. Fr. 68, 65 (1950)

14/ C.W. CONATSER, dans "Texas Tech University, Mathematics series, n° 10, 1972"

15/ R.W. RICHARDSON, Pacific J. Math. 22, 339 (1967)

16/ S. PAGE et R.W. RICHARDSON, Trans. Amer. Math. Soc. 127, 302 (1967)
R. W. RICHARDSON, Illinois J. Math. 11, 92 (1967)

17/ S. HELGASON, "Differential geometry and symmetric spaces" (Academic Press, New York, 1962)

18/ M. HAUSNER et J.T. SCHWARTZ, "Lie groups, Lie algebras" (Gordon and Breach, New York, 1968)

Achevé d'imprimer en Mars 1974

sur

LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE UNIVERSITAIRE

Faculté de Sciences-Mirande - DIJON

Dépôt légal : 1er semestre